



# PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

## PHQ 201

COURS	
<b>Titre :</b>	Physique mathématique
<b>Sigle :</b>	PHQ 201
<b>Crédits :</b>	3 (3 1 5)
<b>WWW :</b>	Consultez Moodle
<b>Travaux dirigés :</b>	1 heure/semaine
<b>Travail personnel :</b>	5 heures/semaine
<b>Session :</b>	2

ENSEIGNANTS	
<b>Nom :</b>	Yves Grosdidier (chargé de cours à forfait)
<b>Bureau :</b>	le bureau d'André-Marie Tremblay, D2-1065
<b>Téléphone :</b>	(819) 821-8000 poste 62056
<b>Jours de disponibilité :</b>	habituellement de 9h30 à 15h30, Courriel : en tout temps
<b>Courriel :</b>	Yves.Grosdidier@USherbrooke.ca
<b>Aide à la correction :</b>	Marianne Ward (Marianne.Ward@USherbrooke.ca), local D2-2052 (Dpt de physique)

### PLACE DU COURS DANS LE PROGRAMME

Type de cours : obligatoire dans les programme de physique et du  
BES sciences et technologie

## OBJECTIFS DU COURS

**Objectifs généraux:** Comprendre et savoir appliquer plusieurs méthodes mathématiques de base à la physique théorique notamment via des applications à la physique: Nombres complexes; Séries et transformées de Fourier; Équations différentielles ordinaires; Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants; Introduction aux probabilités et statistiques.

**Esprit de ce cours :** La physique mathématique est un domaine commun à la physique et aux mathématiques dont le projet est de développer des méthodes mathématiques spécifiques à certains problèmes des sciences physiques ou plus généralement à l'application des mathématiques à la physique, et, parfois, aux développements mathématiques que suscitent certains domaines de recherche en physique. Le sujet est donc très large, et il est difficile d'en définir les contours précis.

Le cours PHQ 201 vise à comprendre et savoir appliquer plusieurs méthodes mathématiques de base à la physique théorique. On y étudie les nombres complexes, les séries et transformées de Fourier, les équations différentielles ordinaires, les systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Nous aborderons aussi la théorie des probabilités et la statistique. Plusieurs applications à la physique serviront d'illustrations. Veuillez noter que les méthodes de l'algèbre linéaire constituent également une partie très importante de la physique mathématique, mais ces questions sont abordées dans un autre cours de votre baccalauréat et nous nous contenterons le plus souvent de rappeler certains résultats, même si parfois nous donnerons quand même des démonstrations en guise de rappel. Un chapitre important de la physique mathématique concerne la théorie des distributions, mais vous serez initié à ce sujet dans le cadre de vos cours en mécanique quantique ou de phénomènes ondulatoires. Dans ce cours, nous nous contenterons probablement d'introduire seulement la distribution de Dirac.

Précisons qu'un bagage mathématique s'acquiert, mais doit également être entretenu. Il vous faut donc prévoir de revenir régulièrement, tout au long de vos études sur des concepts et des méthodes que vous maîtriserez d'autant moins que vous les utiliserez de façon occasionnelle. Les livres sont faits pour cela. Une des difficultés de ce cours est que tous les résultats ne peuvent être parfaitement rigoureusement démontrés à ce niveau du baccalauréat de physique. Ainsi il faudra parfois vous armer de patience et admettre certains résultats que vous ne démontrerez rigoureusement que dans plusieurs de vos futurs cours. Certains aspects de ce cours seront aussi développés dans le cours PHQ 214 (Phénomènes ondulatoires).

## PLAN DE LA MATIÈRE

La matière repose sur i) un cours magistral et ii) un ensemble de problèmes à résoudre sous forme de devoirs, sessions d'exercices et travail personnel.

### COURS MAGISTRAL

1. Nombres complexes:

- a. Motivation historique : résolution des polynômes par radicaux; théorème d'Abel (admis); résolution du trinôme du 3<sup>ème</sup> degré par la méthode de Cardan;
- b. Construction algébrique des complexes; représentation dans le plan euclidien;
- c. Module, conjugué, argument d'un nombre complexe;
- d. Équations complexes; exponentielle complexe et fonctions trigonométriques; formule d'Euler; identités trigonométriques;
- e. Nombre d'onde complexe d'une onde progressive et atténuation; impédance dans un circuit RLC; oscillateur harmonique simple (amorti, entretenu par une force externe harmonique); résonance;
- f. Forme trigonométrique d'un nombre complexe; Racines n-ièmes d'un nombre complexe; formule de Moivre;
- g. Équations polynômiales : degré 2, cas d'un degré quelconque; théorème de d'Alembert (admis);
- h. Suites/séries de nombres complexes; série géométrique de nombres complexes; interférences à faisceaux multiples cohérents.

## 2. Séries et transformées de Fourier :

- a. Signaux périodiques, apériodiques; Coefficients de Fourier d'une fonction périodique; théorème de Fourier; théorème de Dirichlet; série de Fourier et parité du signal; phénomène de Gibbs;
- b. Corde vibrante à extrémités fixes; (diffusion de la chaleur;) Théorème de Parseval;
- c. Série de Fourier en notation complexe; de la série de Fourier à l'intégrale de Fourier d'une fonction non périodique; produit de convolution;
- d. Théorème de Plancherel-Parseval pour l'intégrale de Fourier; relation d'incertitude; (densité spectrale de puissance; théorème de Wiener-Kintchine); Impulsion et transformée de Fourier; (distribution de Dirac;  $(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = 4\pi\delta; \nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta ?)$ ; réponse impulsionnelle?); Critère d'échantillonnage de Nyquist.

## 3. Équations différentielles ordinaires (EDO):

- a. EDO du 1<sup>er</sup> ordre
  - Résolution par une méthode géométrique; existence et unicité des solutions;
  - EDO du 1<sup>er</sup> ordre à variables séparables, linéaires; radioactivité et datation;
- b. EDO linéaires du 2<sup>ème</sup> ordre
  - Existence et unicité des solutions; (Wronskien; formule d'Abel);
  - Polynôme caractéristique; oscillateur harmonique amorti;
  - Méthode de variation des constantes; méthode des coefficients indéterminés; série de Fourier du second membre; résolution par transformation de Fourier; réduction de l'ordre d'une EDO; introduction à la notion de fonction de Green; réponse impulsionnelle.

## 4. Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants:

- a. Valeurs propres et vecteurs propres; diagonalisation d'une matrice; (puissances d'une matrice;)
- b. Oscillateurs couplés et modes normaux; relation de dispersion; modèle d'une molécule diatomique; pendules couplés; circuits LC couplés;
- c. Théorie qualitative des systèmes dynamiques (stabilité, instabilité) à deux ou trois degrés de liberté.

#### 5. Introduction aux probabilités et statistiques:

- a. Univers; événements; notion de probabilité; indépendance des événements; probabilité conditionnelle; formule de Bayes; Arrangements; combinaisons;
- b. Variables aléatoires discrètes, continues; espérance mathématique; variance; inégalité de Tchebychev; loi des grands nombres;
- c. Fonction de distribution; densité de probabilité;
- d. Distributions : binomiale, Poisson, normale; bruit de grenaille;
- e. Estimation de la moyenne; estimation de la variance d'une population; erreur standard; intervalle de confiance; théorème central limite (variables aléatoires à variance finie); lois stables; théorème central limite généralisé (variables aléatoires à variance non finie);
- f. Théorie élémentaire de la diffusion isotrope de photons d'un point de vue statistique; libre parcours moyen.

## DOCUMENTS ET RÉFÉRENCES

En plus des notes du professeur, certains documents additionnels (au moins les devoirs) seront déposés sur la page Moodle du cours. Les notes de cours seront disponibles au service de reprographie PHOTADME de la faculté de droit.

## ÉVALUATION

L'évaluation reposera sur :

- Examen de mi-session (1h50): 35%
- Examen final (3 heures) : 50%
- Devoirs (au nombre de 4 ou 5) : 15%. Les devoirs seront transmis de façon électronique via l'interface Moodle.

Les devoirs seront faits en groupes de 1, 2 ou 3 personnes.

Les examens intra et final auront lieu en classe si les directives de la santé publique nous y autorisent. Sinon, les examens prendront la forme d'un examen à livre ouvert à la maison (*take-home exam*) durant une journée.

## **BIBLIOGRAPHIE**

De nombreux ouvrages peuvent être utiles pour parfaire l'étude des méthodes qui sont présentées dans le cours PHQ 201. Souvent, j'ai trouvé une bonne source d'inspiration dans le *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 3ème éd., de Mary L. Boas (John Wiley & Sons, Inc., 2006). Cet ouvrage est disponible à la bibliothèque de Sciences et Génie sous la cote QA 37 B63 2006.