

Plan de cours

MAT 298 – Calcul vectoriel

1 Renseignements sur la personne responsable du cours

Chargé de cours : Sylvain Bérubé
Bureau : D3-1027-8
Téléphone : 819 821-8000 poste 65420
Courriel : sylvain.berube@usherbrooke.ca

2 Description du cours

2.1 Description selon l'annuaire

Objectifs Maîtriser les techniques du calcul intégral appliquées aux fonctions scalaires ou vectorielles de plusieurs variables. Connaître les équations différentielles aux dérivées partielles. Interpréter et visualiser ces méthodes dans le contexte de la physique.

Contenu Intégrales curvilignes, intégrales multiples, intégrales de surface. Changements de variables, jacobien. Divergence et rotationnel, théorèmes de Gauss et de Stokes, champ conservatif, différentiation en chaîne, laplacien. Équations aux dérivées partielles : équation du premier ordre, équation de Laplace, équation d'onde. Applications à l'électromagnétique.

2.2 Horaire du cours

Lundi	08 h 30 à 10 h 20	D3-2039 (séance de cours)
Jeudi	09 h 30 à 10 h 20	D7-2021 (séance de cours)
Vendredi	10 h 30 à 12 h 20	D3-2039 (séance d'exercices)

2.3 Consultation et ressources supplémentaires

Une période de disponibilité qui convient à toutes les étudiantes et à tous les étudiants sera fixée dès le début du cours. Il sera également possible de rejoindre le professeur par courriel afin de fixer des consultations en dehors des heures habituelles. Il faut aussi noter que le Département de mathématiques offre le service d'assistance en mathématiques à travers son

« Centre d'assistance en mathématiques ». Pour plus de renseignements, s'adresser au Département de mathématiques, ou consulter sa page Web à l'adresse <http://www.usherbrooke.ca/mathematiques/coordonnees/aide-en-mathematiques/>.

2.4 Calendrier

1 ^{er} septembre	Début du cours
7 au 14 octobre	Examens périodiques
16 au 20 octobre	Relâche des activités pédagogiques
11 décembre	Dernière journée de cours et de travaux pratiques
12 au 22 décembre	Examens de fin de trimestre

Le calendrier détaillé se trouve à la page web de la Faculté des sciences, à l'adresse Internet <http://www.usherbrooke.ca/sciences/faculte/calendriers-et-horaires/>.

3 Contexte du cours

Le cours MAT 298 « Calcul vectoriel » est un cours obligatoire destiné aux étudiantes et aux étudiants inscrits à la première session du baccalauréat en physique.

3.1 Place du cours dans le programme

Aucun cours préalable n'est nécessaire pour pouvoir suivre ce cours mais les connaissances visées par celui-ci sont présentes dans la plupart des cours du programme. Les concepts exposés trouvent leur place partout dans les applications physiques, tant en mécanique, qu'en électromagnétique, aussi bien qu'en d'autres domaines des sciences.

Préalable à : PHQ310 (Mécanique II), PHQ421 (Électromagnétisme avancé), PHQ505 (Méthodes de physique théorique), PHQ677 (Hydrodynamique et phénomènes non linéaires).

Concomitant à : PHQ220 (Électricité et magnétisme), PHQ260 (Travaux pratiques I).

Antérieur à : PHQ330 (Mécanique quantique I), PHQ340 (Physique statistique).

3.2 Contexte

Toute activité en science et en technologie a pour but d'identifier les variables de base qui contrôlent ou décrivent la réalité que l'on veut appréhender ou construire ainsi que d'établir les relations existantes entre ces différentes variables. C'est ainsi que les dépendances fonctionnelles entre diverses variables sont à la base du langage mathématique utilisé dans les sciences et les technologies. Il est donc, dans un premier temps, important de pouvoir manipuler avec aisance les fonctions élémentaires qui apparaissent très fréquemment dans la description de certains phénomènes et de pouvoir effectuer des approximations s'appliquant à diverses formules analytiques.

Par ailleurs, le calcul intégral, notamment avec des champs de vecteurs, fournit des outils de grande puissance pour appréhender et exprimer les relations entre ces variables.

De plus, les fonctions de plusieurs variables apparaissent à tous les niveaux dans les applications. Les équations qui gouvernent les processus naturels et technologiques font souvent intervenir des relations entre des quantités dont on connaît le taux de changement en fonction du temps. De telles équations sont appelées des équations différentielles, équations qui permettent en principe de trouver les dépendances fonctionnelles recherchées à partir de conditions initiales.

L'ensemble de ces deux sujets (fonctions de plusieurs variables et équations différentielles) est considéré comme une base essentielle à toute activité dans les domaines scientifiques et technologiques, et constitue un outil de travail indispensable. Dans ce cours on s'intéressera au calcul différentiel et intégral. On s'efforcera de rendre évidente son utilité et ubiquité par un grand nombre d'applications, et en maintes occasions par une approche qui se veut plus intuitive que formelle.

4 Objectifs

4.1 Objectifs généraux

- a) Maîtriser les techniques du calcul différentiel, appliquées aux fonctions de une ou plusieurs variables ;
- b) Maîtriser les techniques du calcul intégral appliqués aux fonctions de une ou plusieurs variables, à valeurs scalaires ou vectorielles.
- c) Se familiariser avec certaines équations aux dérivées partielles, en comprendre le sens physique, et établir des propriétés de certaines solutions.

4.2 Objectifs spécifiques

À la fin de ce cours un étudiant devrait être en mesure de (il est très possible que pour certains des objectifs ci-bas ce soit déjà le cas) :

- a) savoir représenter une fonction (scalaire ou vectorielle) de plusieurs variables par un graphique, éventuellement en ayant recours à des outils informatiques ;
- b) savoir effectuer les opérations différentielles impliquant plusieurs variables et en comprendre l'interprétation géométrique (dérivées partielles, gradient, plans tangents, approximations linéaires) ;
- c) connaître les principales applications de la formule de Taylor à une ou plusieurs variables (calcul des limites, détermination de la nature des points critiques, développements limités) ;
- d) maîtriser les techniques usuelles d'optimisation des fonctions à plusieurs variables assujetties à des contraintes ou non (utilisation du Hessien et des multiplicateurs de Lagrange) ;
- e) utiliser des intégrales doubles ou triples pour calculer volumes, masses, moments d'inertie, aires, en coordonnées rectangulaires, polaires, cylindriques ou sphériques ;
- f) effectuer les changements de variables appropriés afin de mener à terme des calculs explicites d'intégrales doubles ou triples (calcul et utilisation du Jacobien) ;
- g) maîtriser les théorèmes du calcul intégral vectoriel : le théorème de Green, de Stokes, de la divergence, et les interpréter dans un contexte physique concret (flux, travail...) ;
- h) se servir d'outils informatiques afin d'illustrer les concepts reliés au cours.

5 Contenu détaillé

Le cours MAT 298 comporte deux parties clairement distinctes, chacune d'elles prenant à peu de chose près la moitié de la session. Il s'agit du calcul différentiel à plusieurs variables, puis du calcul intégral à plusieurs variables.

I Calcul différentiel à plusieurs variables

1. *Fonctions de plusieurs variables.* Généralités. Limites et continuité. Cylindres et surfaces quadriques.
2. *Dérivées des fonctions à plusieurs variables.* Les dérivées partielles. Plans tangents et approximations linéaires. La règle de dérivation en chaîne. Dérivées directionnelles et vecteur gradient. Les séries de Taylor en deux variables.
3. *Optimisation.* Valeurs extrêmes de fonctions à plusieurs variables. L'optimisation des fonctions à plusieurs variables. Les multiplicateurs de Lagrange.

II Calcul intégral avec plusieurs variables

1. *Intégrales doubles et triples.* Généralités et exemples divers. Changements de variables, Jacobien, coordonnées polaires, sphériques et cylindriques. Volumes, moments d'inertie.
2. *Calcul vectoriel.* Champs de vecteurs, intégrales curvilignes et de surface, théorème fondamental des intégrales curvilignes, divergence et rotationnel. Intégrales de champs de vecteurs : théorèmes de Green, Stokes et Gauss ; applications : travail, flux, aires.

6 Considérations pédagogiques

Selon la description officielle du cours, celui-ci comporte 3 heures hebdomadaires de rencontres avec le professeur et 2 heures d'exercices dirigés, ainsi que 3 heures de travail personnel.

6.1 Séances de cours

Les étudiantes et les étudiants, premiers responsables de leur apprentissage, doivent être le plus actifs possible. Ainsi avant chaque rencontre la matière à couvrir ainsi que certains exercices seront indiqués (Moodle). Il est attendu que les étudiant(e)s en fassent la lecture et essaient de faire les exercices en question, afin de pouvoir dégager des questions ou soulever des problèmes théoriques. Les périodes de cours hebdomadaires serviront précisément à répondre à ces questions et à reprendre les explications des aspects plus délicats, les accompagnant d'exemples ou exercices résolus, au besoin.

6.2 Séances d'exercices

En plus des cours théoriques, 2 heures par semaine sont consacrées à des séances d'exercices dirigées. Elles auront lieu sous la supervision d'un étudiant gradué en mathématiques, qui travaillera en concordance avec l'enseignant principal. À chaque semaine une liste d'exercices suggérés sera publiée (Moodle) et pendant les séances d'exercices un retour sur les points marquants de ces exercices sera fait. Les exercices suggérés sont prélabes aux devoirs en ce

sens que ces exercices visent à renforcer / consolider les aspects techniques de la matière, tandis que les devoirs incluront des problèmes plus poussés.

6.3 Ressources

Texte Le livre ci-bas est obligatoire.

— Stewart, J. « Calcul à plusieurs variables ». Modulo 2016. ISBN 978-2-89732-051-5.

Moodle Le cours compte une page Moodle, accessible à toutes les étudiantes et tous les étudiants inscrits. Dans cette page seront disponibles plusieurs informations importantes (devoirs à remettre, notes partielles, ressources complémentaires,...). Par ailleurs, toutes les étudiantes et tous les étudiants inscrits à un cours au Département de mathématiques ont droit à un compte sur le réseau informatique et à une adresse de courriel de l'Université de Sherbrooke (pour plus de détails à ce sujet, aller à <https://www.usherbrooke.ca/courriel/>). Le professeur utilisera la page Moodle, ainsi que le courriel pour donner des informations concernant le cours en dehors des heures de classe. Les étudiants doivent donc consulter régulièrement leur courriel (adresse @usherbrooke.ca). De même, les étudiantes et les étudiants sont invités à utiliser le courriel autant que possible pour rejoindre le professeur en dehors de ses heures de disponibilité.

Ressources informatiques L'enseignant utilisera constamment le logiciel SageMath pour illustrer les cours et effectuer certains calculs. Les fichiers utilisés en classe seront disponibles dans la page Moodle du cours. SAGEmath est un puissant ensemble de logiciels de calcul symbolique et numérique. Le logiciel est installé sur les ordinateurs des laboratoires des départements d'informatique, de mathématiques et de physique. Il s'agit d'un logiciel libre et comme tel, il peut être téléchargé et installé dans n'importe quel ordinateur. Les étudiantes et étudiants sont fortement incités à l'installer dans leurs ordinateurs personnels. Il est également possible de l'utiliser en ligne sans l'installation, pour cela il faut suivre les instructions données à <https://cloud.sagemath.com/>. Pour avoir des informations supplémentaires, consultez la page Web à l'adresse <http://www.sagemath.org/>. Il y aura constamment de la documentation dans la page Moodle du cours. Il ne faut pas hésiter à poser des questions à ce sujet.

7 Évaluation et notation

Travaux :	25 %
Examen intratrimestriel :	35 %
Examen final :	40 %

Devoirs périodiques Les travaux comprennent sept exercices hebdomadaires et quatre devoirs. Les exercices hebdomadaires portent sur la matière vue en classe au cours de la semaine. Ils sont principalement calculatoires. Ils valent 1 point chacun. Les devoirs portent sur la matière vue en classe depuis le devoir précédent. Ils sont d'un niveau de complexité plutôt élevé et demandent un travail de synthèse et une assimilation effective de la matière. L'usage de SageMath sera parfois requis. Ils valent 100 points chacun. Les exercices hebdomadaires et les devoirs peuvent être remis en groupes de deux étudiants, au format papier. Les énoncés seront communiqués à travers le site Moodle du cours. La note finale des travaux se calcule comme suit :

$$\frac{\sum \text{Devoirs}}{4} \times \frac{\text{MIN}(10, 4 + \sum \text{Hebdos})}{10}$$

Examens intratrimestriel et final Les examens se dérouleront selon l’horaire prévu par la faculté, sans accès à calculatrices ou ordinateurs, mais une feuille au format *US Letter* de notes personnelles sera permise (recto-verso, écrite à la main, écriture normale). L’examen comportera entre 6 et 10 questions, pouvant inclure jusqu’à 20 % des points alloués à des questions vrai/faux ou à choix multiple (avec justification). Pour le reste, il s’agira d’exercices visant à vérifier la compréhension et la maîtrise des différents sujets abordés dans le cours.

Critères de correction Dans tous les cas les critères de correction seront la pertinence et la cohérence de la démarche, la rigueur des raisonnements, la clarté, l’exactitude et la précision des solutions aux problèmes et la justesse des calculs. Il est cependant naturel que pour les devoirs il sera accordé plus d’importance à la clarté, la complétude et la qualité du français.

Retards Aucun retard ne sera accepté pour la remise des devoirs. Pour toute absence à un examen ou toute tentative de plagiat, l’élève recevra une note de zéro pour l’évaluation en question. Aucun examen de reprise n’est possible à moins de circonstances majeures jugées acceptables par la Faculté des sciences.

Politique de la langue Tous les devoirs et les examens devront être rédigés de façon claire, précise et complète avec une qualité du français acceptable. La politique de la Faculté des sciences prévoit une pénalité pouvant atteindre jusqu’à 5 % de la note finale à un travail ou à un examen pour la mauvaise qualité de la langue.

8 Références bibliographiques

8.1 Matériel obligatoire.

- Stewart, J. « Calcul à plusieurs variables ». Modulo 2016. ISBN 978-2-89732-051-5.

8.2 Matériel additionnel

Le contenu du cours est très classique, en ce sens qu’il touche à la base des techniques mathématiques utilisées en sciences appliquées. De ce fait, il existe une très grande quantité de textes qui pourraient parfaitement servir comme matériel complémentaire. Voici une liste non exhaustive.

- McCallum, William G et Hugues-Hallet, Deborah et Gleason, Andrew et al. Fonctions de plusieurs variables, Chenelière/McGraw-Hill, 1999. ISBN 2-7651-0253-8.
- Thomas’ Calculus, multivariable (12th edition). Pearson, 2009, ISBN-13 : 978-0321643698.
- Marsden, J.E. et Tromba, A.J., « Vector Calculus », W.H. Freedman and Co., 1988.
- Lang, Serge. « Calculus of several variables », Berlin ; New York, N.Y. : Springer-Verlag, 1994. ISBN 3540964053.
- Michael Corral. « Vector Calculus ». American Institute of Mathematics, Open Textbook Initiative. Texte qui peut être téléchargé gratuitement à l’adresse <http://www.aimath.org/textbooks/corral.html>
- Hassani, Sadri. « Mathematical Methods for Students of Physics and Related Fields ». New York, NY : Springer New York, 2009. Disponible en format électronique à travers le site de la bibliothèque de l’UdeS.