où $\mathcal{T}_B$ et $\mathcal{R}_B$ sont les coefficients de transmission et de réflexion pour une barrière simple. Le coefficient de transmission global est finalement

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\text{D.B.}} &= |(T_{\text{D.B.}})_{11}|^{-2} \\ &= \left\{1 + \left(\frac{4\mathcal{R}_B}{\mathcal{T}_B^2}\right)\cos^2(\theta + kl)\right\}^{-1}\end{aligned} \tag{1.55}$$

La caractéristique frappante de cette formule est la possibilité de résonances en fonction de l: l'argument θ de T_{11} ne dépend pas de l et donc en variant l on passe nécéssairement par des points où $\cos(\theta + kl) = 0$. Pour ces valeurs, l'onde traverse la double barrière avec probabilité 1. Notez que ceci est indépendant de la hauteur h et de la largeur a de la barrière. Cependant, comme $\mathcal{T}_B$ est très petit dans la limite où $ha \gg 1$, le coefficient $\mathcal{T}_{\text{D.B.}}$ tombe rapidement lorsqu'on s'éloigne de la résonance dans cette limite. Autrement dit, la largeur caractéristique de cette résonance tend vers zéro quand $\mathcal{T}_B$ devient petit. Un tel dispositif constituerait donc un excellent filtre en énergie pour les électrons. Remarquons cependant que θ est une fonction de k et qu'une analyse de $\mathcal{T}_{\text{D.B.}}$ en fonction de E pour une valeur donnée de l ne mène pas nécessairement à une résonance : tout dépend de l'existence ou non d'états quasi-liés dans le puits – et du nombre de ces états.

1.4 Oscillateur harmonique

1.4.1 États propres et opérateurs d'échelle

Le système le plus simple et le plus important dans toute la physique théorique est sans doute l'oscillateur harmonique. L'hamiltonien d'un oscillateur simple est

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \tag{1.56}$$

où m est la masse de l'oscillateur et ω sa fréquence. Rappelons ici comment on détermine le spectre de l'hamiltonien à l'aide des opérateurs d'échelle (voir la section 1.1.3): on définit l'opérateur

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(X + iP/m\omega) \tag{1.57}$$

En tenant compte de la relation $[X, P] = i\hbar$, on vérifie aisément que

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega(a^\dagger a + aa^\dagger) \quad \text{et} \quad [a, a^\dagger] = 1 \tag{1.58}$$

La relation de commutation nous permet d'écrire

$$H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2}) \qquad N \equiv a^\dagger a \tag{1.59}$$

Les opérateurs a et $a^\dagger$, qui ne sont pas hermitiques, ont la propriété de diminuer et d'augmenter respectivement la valeur propre de N, donc aussi de H. Pour cette raison, a et $a^\dagger$ sont appelés *opérateurs d'échelle*. Soyons explicites : soit $|n\rangle$ un vecteur propre de N avec valeur propre n. Alors $a^\dagger|n\rangle$ est encore un vecteur propre de N, cette fois avec valeur propre $n+1$, car

$$\begin{aligned} Na^\dagger|n\rangle &= a^\dagger a a^\dagger|n\rangle \\ &= a^\dagger(1+a^\dagger a)|n\rangle \\ &= (1+n)a^\dagger|n\rangle \\ &\propto |n+1\rangle \end{aligned} \tag{1.60}$$

De même, l'état $a|n\rangle$ correspond à la valeur propre $n-1$:

$$\begin{aligned} Na|n\rangle &= a^\dagger a a|n\rangle \\ &= (-1+aa^\dagger)a|n\rangle \\ &= (-1+n)a|n\rangle \\ &\propto |n-1\rangle \end{aligned} \tag{1.61}$$

Ces propriétés se reflètent dans les relations de commutation

$$[N,a^\dagger] = a^\dagger \qquad [N,a] = -a$$

En général, si le commutateur de deux opérateurs A et B est $[A,B] = \beta B$, cela signifie que l'opérateur B, agissant sur un état propre de A avec valeur propre α, produit un autre état propre de A avec valeur propre $\alpha+\beta$.

En supposant que l'état $|n\rangle$ est normalisé, on peut en déduire la norme de $a^\dagger|n\rangle$:

$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|(1+a^\dagger a)|n\rangle = (n+1)\langle n|n\rangle \tag{1.62}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad (n\neq 0) \end{aligned} \tag{1.63}$$

On déduit de cette dernière relation que n doit être un entier positif ou nul. En effet, l'ensemble des valeurs propres de N forme une suite de valeurs espacées de 1:

$$\ldots n+2\ ,\ n+1\ ,\ n\ ,\ n-1\ ,\ n-2\ldots \tag{1.64}$$

et à chacune de ces valeurs propres ne correspond qu'un seul état propre (aucune dégénérescence). Si n n'était pas un entier, il s'ensuivrait une suite infinie d'états de norme *négative* avec $n<0$, ce qui est impossible : on a supposé dès le départ que le produit bilinéaire est défini positif sur l'espace des états. Si n est entier, cette suite se termine avec $n=0$ en raison de la relation $a|0\rangle = 0$. L'état $|0\rangle$ est donc l'état fondamental de l'hamiltonien : $H|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle$. Les états excités s'obtiennent alors simplement en appliquant $a^\dagger$ à répétition :

$$H|n\rangle = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega|n\rangle \qquad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle \tag{1.65}$$

Remarques :

- Un opérateur de la forme $a^\dagger a$, où a est un opérateur quelconque, n'a que des valeurs propres positives ou nulles. En effet, il suffit de montrer que la valeur moyenne de $a^\dagger a$ dans n'importe quel état $|\psi\rangle$ est non négative :
$$\langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle = \langle a\psi|a\psi\rangle \tag{1.66}$$
Cette dernière quantité étant la norme d'un vecteur d'état, est positive, ou nulle si $a|\psi\rangle = 0$.
- Comme $[H, a] = -\hbar\omega a$, l'évolution temporelle de a est donnée par
$$\dot{a} = \frac{i}{\hbar}[H, a] = -i\omega a \quad \Longrightarrow \quad a(t) = a(0)\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{1.67}$$
Ce qui coïncide avec la version classique du problème.
- La fonction d'onde de l'état $|n\rangle$ se trouve aisément en appliquant l'opérateur différentiel
$$a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(-\frac{1}{m\omega}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right) \tag{1.68}$$
sur la fonction d'onde de l'état fondamental $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$. Cette dernière satisfait à l'équation
$$\left(\frac{1}{m\omega}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)\psi_0(x) = 0 \tag{1.69}$$
Ce qui implique
$$\psi_0(x) \propto \exp -\frac{1}{2}m\omega x^2/\hbar \tag{1.70}$$

1.4.2 États cohérents

Les états propres $|n\rangle$ de l'hamiltonien ne sont pas très utiles pour faire le lien avec la théorie classique de l'oscillateur harmonique. À cette fin on introduit une famille d'états appelés *états cohérents*, caractérisée par un paramètre complexe z:

$$|z\rangle \equiv \mathrm{e}^{-|z|^2/2}\mathrm{e}^{za^\dagger}|0\rangle \tag{1.71}$$

La constante $\mathrm{e}^{-|z|^2/2}$ assure la normalisation $\langle z|z\rangle = 1$, comme nous le vérifierons plus bas. L'état $|z\rangle$ est une superposition de tous les états propres $|n\rangle$, comme on peut le constater en développant l'exponentielle en série et en substituant la définition de $|n\rangle$:

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{1.72}$$

L'essentiel des propriétés des états cohérents peut être démontré à l'aide de la relation suivante :

$$[a, \mathrm{e}^{za^\dagger}] = z\mathrm{e}^{za^\dagger} \tag{1.73}$$