Introduction aux Algèbres amassées : Définitions et exemples

(par Bertrand Nguefack, *15 Novembre 2006)*
Université de Sherbrooke

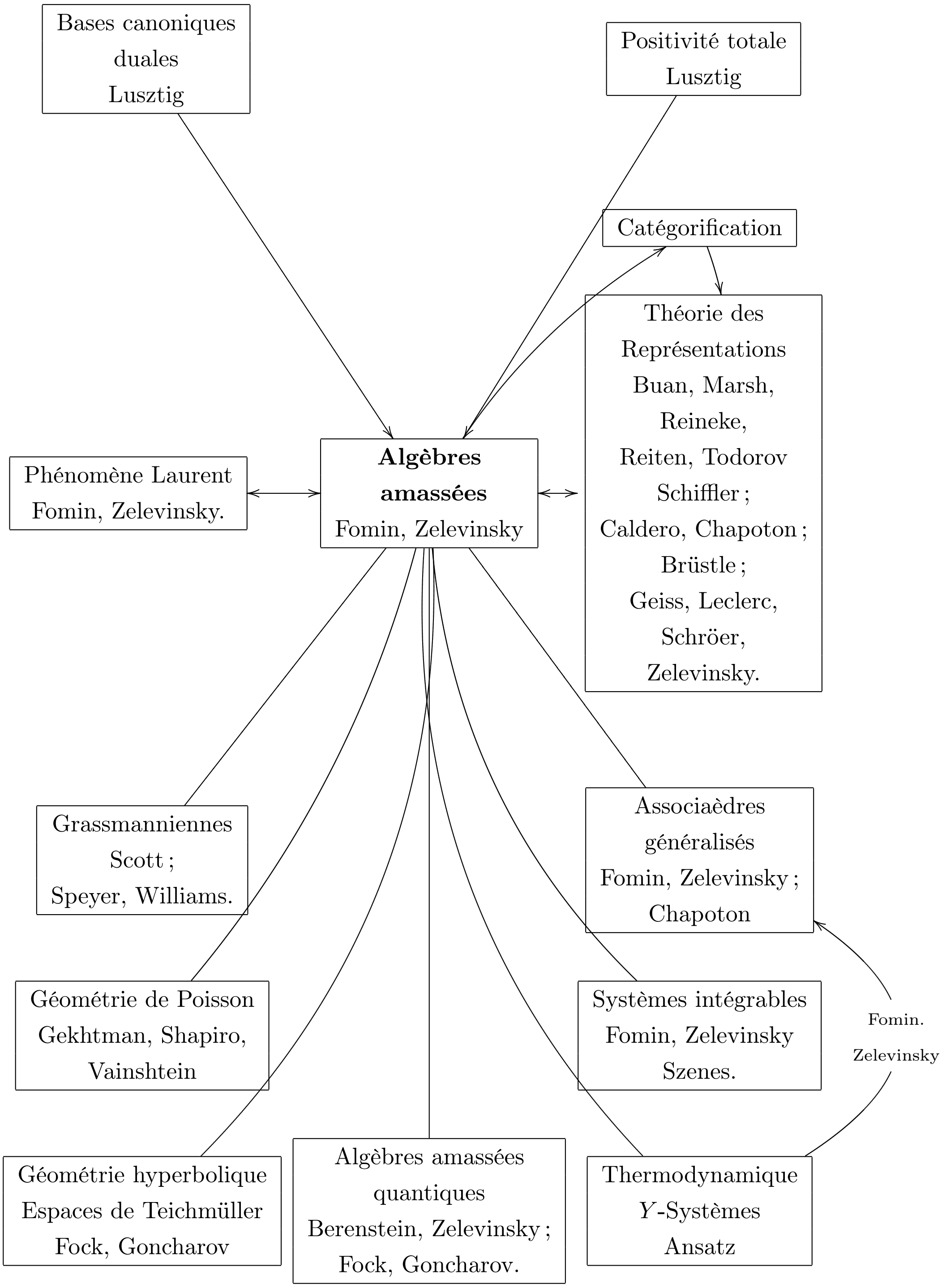
Notes des séminaires d'algèbres amassées et des articles des auteurs Andrei Zelevinsky, Sergey Fomin et Arkady Berenstein

Table des matières

1 Introduction

Origine

Les algèbres dites amassées ("cluster algebras", en anglais) sont une très récente classe d'algèbres introduites au début des années 2000 par les auteurs Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky suite à leur travaux sur les bases canoniques duales et la positivité totale dans les groupes semi-simples. C'est dans un souci de créer un cadre algébrique adéquat pour l'étude de bases canoniques duales et de la positivité totale que ces deux auteurs initient l'étude des algèbres amassées. Ils débutent avec les fondements de cette théorie dès Mai 2000, après avoir pris part à une conférence baptisée "Representation theory-2000", organisée par Victor Kac et Alexander A. Kirillov, à "Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics" à Vienne en Autriche ; et c'est au R.-U., au "Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences" de Cambridge, qu'ils finissent de rédiger le tout premier article "Cluster algebras I : Foundations". Par leurs très riches structures combinatoriques, les algèbres amassées s'avèrent très vite intéressantes et apparaissent dans divers domaines des mathématiques comme la géométrie, la combinatoire, la physique mathématique. Le schéma ci-dessous illustre bien la situation des algèbres amassées à travers divers domaines des mathématiques.

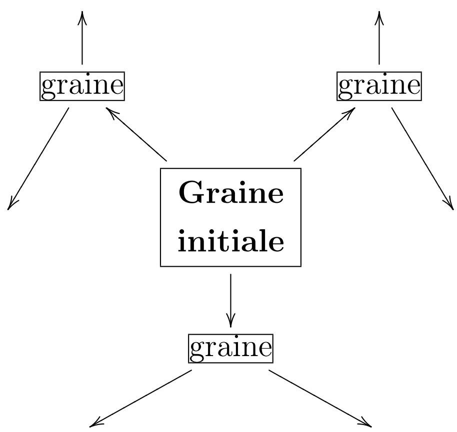

Bases canoniques duales Lusztig
Positivité totale Lusztig
Catégorification
Théorie des Représentations Buan, Marsh, Reineke, Reiten, Todorov Schiffler ; Caldero, Chapoton ; Brüstle ; Geiss, Leclerc, Schröer, Zelevinsky.
Phénomène Laurent Fomin, Zelevinsky.
Algèbres amassées Fomin, Zelevinsky
Grassmanniennes Scott ; Speyer, Williams.
Associaèdres généralisés Fomin, Zelevinsky ; Chapoton
Géométrie de Poisson Gekhtman, Shapiro, Vainshtein
Systèmes intégrables Fomin, Zelevinsky Szenes.
Fomin. Zelevinsky
Géométrie hyperbolique Espaces de Teichmüller Fock, Goncharov
Algèbres amassées quantiques Berenstein, Zelevinsky ; Fock, Goncharov.
Thermodynamique Y-Systèmes Ansatz

Description informelle

Étant donné un entier naturel n strictement positif, une algèbre amassée de rang n est un anneau commutatif (unifère) sans diviseur de zéro, engendré au sein d'un corps ambiant $\mathcal{F}$ par un ensemble éventuellement infini de générateurs appelés *variables amassées*. Ces variables ne sont pas arbitrairement fixées dès le départ ; l'ensemble de toutes les variables amassées est une union (nécessairement non disjointe) de sous-ensembles à n éléments appelés *amas*, qui sont liés entre eux par une propriété dite *d'échange* : pour chaque amas X et chaque variable $x \in X$, il existe un autre amas obtenu à partir de X en remplaçant la variable x par un autre élément x' selon *une relation binomiale dite d'échange* de la forme :

$$xx' = M_1 + M_2,$$

dans laquelle le membre de droite satisfait à des conditions bien précises. Toutes les variables amassées (et par conséquent l'algèbre amassée correspondante) sont obtenues d'une *graine* dans $\mathcal{F}$, via un procédé récursif de *mutation de graine*, comme ci-après illustré.



Commençons par présenter les algèbres amassées dites sans coefficients.

2 Algèbres amassées sans coefficients

2.1 Définitions

Soient un entier naturel non nul n et le corps des fractions rationnelles $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, ..., x_n)$ à n variables $x_1, \ldots\ldots, x_n$ sur $\mathbb{Q}$ appelé corps ambiant, les variables $x_1, \ldots\ldots, x_n$ étant algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. On note $[1, n] = \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Définition 2.1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. B est dite **symétrisable** (ou **anti-symétrisable**) s'il existe une matrice diagonale D à coefficients strictement positifs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que DB soit une matrice symétrique (ou anti-symétrique, respectivement). Dans une telle situation la matrice symétrique (ou anti-symétrique) DB est appelée **la symétrisée** (ou **l'anti-symétrisée**, respectivement) de B tandis que D est appelée la matrice **symétrisante** (ou **anti-symétrisante**, respectivement) de B.

Pour l'instant, seules les matrices anti-symétrisables nous intéressent.

Remarque 2.2. si $B = (b_{ij})$ est anti-symétrisable, alors pour tous $i, j \in [1, n]$, $b_{ii} = 0$, et si $i \neq j$ alors soit $b_{ij} = b_{ji} = 0$, soit $b_{ij}b_{ji} < 0$. Une matrice carrée satisfaisant la propriété précédente est dite **anti-symétrique pour les signes**. Ainsi toute matrice anti-symétrisable est anti-symétrique pour les signes, mais la réciproque est fausse. Un contre-exemple est donné dans les lignes qui suivent.

Exemple 2.3. Soit $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ l'ensemble des entiers positifs, les matrices carrées d'ordre 2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ anti-symétrisables sont de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$ et $-A$, avec $b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Soit les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} ; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors B étant anti-symétrique est trivialement anti-symétrisable, B_1 est anti-symétrisable de matrice anti-symétrisante $D = (3,2,2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, mais B_2 bien qu'étant anti-symétrique pour les signes n'est cependant pas anti-symétrisable.

Définition 2.4. Une **graine** dans $\mathcal{F}$ est une paire (X, B) où
• $\mathrm{X} = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset \mathcal{F}$ est un sous-ensemble à n éléments algébriquement indépendants engendrant $\mathcal{F}$; X est alors appelé une base de transcendence de $\mathcal{F}$
• $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est une matrice anti-symétrisable.
L'ensemble X est appelé **amas** ("**cluster**" en anglais) et les éléments de X sont appelés **variables amassées** ("cluster variables" en anglais) de la graine (X, B).

Exemple 2.5. Posons $n = 2$, $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, x_2)$ et $\mathrm{X} = \{x_1, x_2\}$.
les paires $\left(\mathrm{X}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$; $\left(\mathrm{X}' = \left\{\frac{1+x_2}{x_1}, x_2\right\}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, sont deux graines dans $\mathcal{F}$.

À présent l'on a besoin d'un outil combinatorique pour construire notre algèbre amassée à partir de la donnée dans $\mathcal{F}$ d'une graine initiale.

Définition 2.6. Soit (X, B) une graine dans $\mathcal{F}$, avec $B = (b_{ij})$. Pour chaque $k \in [1, n]$, on définit un nouvel élément $x'_k \in \mathcal{F}$ par :

$$x'_k = \frac{\prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}}{x_k} \tag{2.1}$$

avec la convention habituelle que le produit vide vaut 1. On pose ensuite

$$\mathrm{X}_k = \mathrm{X} - \{x_k\} \cup \{x'_k\}. \tag{2.2}$$

Ces deux relations sont appelées **relations d'échange** tandis que la matrice B est dénommée **matrice d'échange** de la graine (X, B).

Nous en venons à la notion de mutation de graine, mais avant cela définissons la mutation matricielle.

Définition 2.7. Une matrice $B' = (b'_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est dite être obtenue d'une matrice $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ par **mutation dans la direction** $k \in [1, n]$ et l'on écrit $B' = \mu_k(B)$, si les coefficients de B' sont donnés par la formule

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{si } i = k \text{ ou } j = k; \\ b_{ij} + \dfrac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2}, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Il faut noter que cette définition est valide pour les matrices rectangulaires à coefficients dans tout sous-anneau du corps des complexes $\mathbb{C}$.

Nous énonçons les propriétés suivantes :

Lemme 2.1. *(i) la mutation matricielle est une opération involutive :*
$\mu_k \circ \mu_k(B) = B$.
(ii) La mutation matricielle préserve les conditions de la définition 2.4 : Plus précisément si (X, B) *est une graine dans* $\mathcal{F}$ *et* k *un indice dans* $[1, n]$*, alors la paire* $(\mathrm{X}_k, \mu_k(B))$ *est encore une graine dans* $\mathcal{F}$*,* X_k *étant donné par les équations (2.1) et (2.2). De plus* B *et* $\mu_k(\mathrm{B})$ *partagent la même matrice antisymétrisante.*

Preuve (i) Posons $B' = \mu_k(B) = (b'_{ij})$; $B'' = \mu_k(B') = (b''_{ij})$; on a :

pour $i = k$ ou $j = k$, $b''_{ij} = -b'_{ij} = -(-b_{ij}) = b_{ij}$. Dans le cas contraire,

$$b''_{ij} = b'_{ij} + \frac{|b'_{ik}|b'_{kj} + b'_{ik}|b'_{kj}|}{2} = b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} + \frac{-|-b_{ik}|b_{kj} - b_{ik}|-b_{kj}|}{2}$$

$$b''_{ij} = b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} - \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} = b_{ij}. \text{ Ainsi } \mu_k\mu_k(B) = B.$$

(ii) Pour la graine (X, B) on sait que X est une base de transcendance de

$\mathcal{F}$ et B est anti-symétrisable. En outre, $\mathrm{X}_k = \mathrm{X} - \{x_k\} \cup \{x'_k\}$, d'après les relations d'échange (2.1)–(2.2), la quantité $p = x_k x'_k \in \mathbb{Z}[\mathrm{X} - \{x_k\}]$. Il suit immédiatement que X_k est comme X un système algébriquement indépendant dans $\mathcal{F}$ qui en plus engendre $\mathcal{F}$ puisque la variable x_k est la fraction rationnelle $\frac{p}{x'_k}$.

Soit $\mathrm{D} = (d_1, \ldots, d_n)$ la matrice anti-symétrisante de B ; on a $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$ pour tout $i, j \in [1, n]$, et $d_i > 0$ pour tout $i \in [1, n]$. Vérifions que DB′ est anti-symétrique.
Si $i = k$ ou $j = k$ alors on a :
$d_i b'_{ij} = d_i(-b_{ij}) = -d_i b_{ij} = -(-d_j b_{ji}) = d_j b_{ji} = -d_j b'_{ji}$.
Dans le cas où $i \neq k$ et $j \neq k$ on a :

$$d_i b'_{ij} = d_i \left(b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} \right) = d_i b_{ij} + \frac{|d_i b_{ik}|b_{kj} + d_i b_{ik}|b_{kj}|}{2}$$

$$d_i b'_{ij} = -d_j b_{ji} + \frac{|-d_k b_{ki}|b_{kj} - d_k b_{ki}|b_{kj}|}{2} = -d_j b_{ji} + \frac{|-b_{ki}|d_k b_{kj} - b_{ki}|d_k b_{kj}|}{2}$$

$$d_i b'_{ij} = -d_j b_{ji} + \frac{-|b_{ki}|d_j b_{jk} - b_{ki}| - d_j b_{jk}|}{2} = -d_j b_{ji} - d_j \frac{|b_{jk}|b_{ki} + b_{jk}|b_{ki}|}{2}$$

$d_i b'_{ij} = -d_j b'_{ji}$.
Ainsi la matrice DB′ est bien anti-symétrique. Ceci achève la preuve de l'énoncé. ∎

D'où la définition suivante.

Définition 2.8. Soit (X, B) une graine dans $\mathcal{F}$. Pour chaque indice $k \in [1, n]$, la mutation dans la direction k transforme la graine (X, B) en une autre graine $\mu_k(\mathrm{X}, B) = (\mathrm{X}', B')$ avec $\mathrm{X}' = \mathrm{X}_k = \mathrm{X} - \{x_k\} \cup \{x'_k\}$ donné par les formules (2.1)–(2.2), et $B' = \mu_k(B)$.

Remarque 2.9. La mutation de graine reste une opération involutive :
$\mu_k \mu_k(\mathrm{X}, B) = (\mathrm{X}, B)$.

Exemple 2.10. Pour $n = 2$, $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, x_2)$ et $\mathrm{X} = \{x_1, x_2\}$, considérant les graines de l'exemple2.5,

$G = \left(\mathrm{X}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$; et $G' = \left(\mathrm{X}' = \left\{\frac{1+x_2}{x_1}, x_2\right\}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, on a $G' = \mu_1(G)$. On a aussi $\mu_2(G') = \left(\left\{\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right\}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

À présent nous sommes en mesure de définir notre algèbre amassée. La mutation de graine induit sur l'ensemble de toutes les graines dans $\mathcal{F}$ une relation d'équivalence comme suit. Puisque pour chaque indice k, μ_k^2 est égal à l'identité, la relation "est obtenu par mutation de" est symétrique ; on considère donc sa clôture reflexive et transitive que l'on note $\sim$: c'est la relation d'équivalence engendrée sur l'ensemble de toutes les graines dans $\mathcal{F}$ par les mutations de graines. On écrira donc $(\mathrm{X}, \mathrm{B}) \sim (\mathrm{X}', \mathrm{B}')$ pour dire que les graines (X, B) et $(\mathrm{X}', \mathrm{B}')$ sont équivalentes par mutations ou encore mutation-équivalentes.

Définition 2.11. Soit $\mathcal{G}$ une classe d'équivalence par mutations d'une graine initiale (X, B), désignons par $\chi = \chi(\mathcal{G})$ l'union de tous les amas des graines dans $\mathcal{G}$. Alors les éléments de χ sont appelés **variables amassées**.
L'algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ de rang n associée à $\mathcal{G}$ est la sous-$\mathbb{Z}$-algèbre du corps ambiant $\mathcal{F}$ engendrée par toutes les variables amassées : $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathbb{Z}[\chi]$.

Exemple 2.12. ***Une algèbre amassée de rang 2***
On prend $n = 2$, $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, x_2)$ et $\mathrm{X} = \{x_1, x_2\}$,
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $G_0 = \left(\mathrm{X}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
Pour tout $k = 1, 2$, on a $\mu_k(B) = B'$ et $\mu_k(B') = B$.
Si l'on pose $\chi = \{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des variables amassées, avec comme donnée initiale $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, alors suivant l'équation (2.1), les y_t satisfont à la relation d'échange ci-après :

$$y_{t-1} y_{t+1} = y_t + 1$$

On trouve successivement :
$y_3 = \frac{y_2+1}{y_1}$; $y_4 = \frac{y_1+y_2+1}{y_1 y_2}$; $y_5 = \frac{y_1+1}{y_2}$; et ($y_6 = y_1$, $y_7 = y_2$,...etc). Ainsi le

processus s'arrête et l'on n'a que 5 variables amassées. Alors si on remplace y_1 et y_2 par leur valeurs respectives, on a $\chi = \left\{x_1, x_2, \frac{x_2+1}{x_1}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}, \frac{x_1+1}{x_2}\right\}$. On peut énumérer les différentes graines en commençant par la graine initiale.

$$
\begin{aligned}
&G = (\{x_1, x_2\}, B)\\
&G_1 = \mu_1(G) = \left(\left\{\tfrac{x_2+1}{x_1}, x_2\right\}, B'\right)\\
&G_2 = \mu_2(G_1) = \left(\left\{\tfrac{x_2+1}{x_1}, \tfrac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}\right\}, B\right)\\
&G_3 = \mu_1(G_2) = \left(\left\{\tfrac{x_1+1}{x_2}, \tfrac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}\right\}, B'\right)\\
&G_4 = \mu_2(G_3) = \left(\left\{\tfrac{x_1+1}{x_2}, x_1\right\}, B\right)\\
&G_5 = \mu_1(G_4) = (\{x_2, x_1\}, B')\\
&G_6 = \mu_2(G_5) = \left(\left\{x_2, \tfrac{x_2+1}{x_1}\right\}, B\right)\\
&G_7 = \mu_1(G_6) = \left(\left\{\tfrac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}, \tfrac{x_2+1}{x_1}\right\}, B'\right)\\
&G_8 = \mu_2(G_7) = \left(\left\{\tfrac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}, \tfrac{x_1+1}{x_2}\right\}, B\right)\\
&G_9 = \mu_1(G_8) = \left(\left\{x_1 \tfrac{x_1+1}{x_2}\right\}, B'\right) \text{ et ona}\\
&\mu_2(G_9) = (\{x_1, x_2\}, \mathrm{B}) = G.
\end{aligned}
$$

On a commencé par muter la graine G dans la direction 1, et on est revenu à G suivant la mutation dans la direction 2 ; les directions 1 et 2, étant les seules directions concevables de mutation de la graine G, on conclut que les graines ci-dessus constituent la classe de toutes les graines mutation-équivalentes à la graine initiale G. Ainsi

$$\mathcal{G} = \{G, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9\}$$

est la classe d'équivalence par mutations de $G = (\mathrm{X}, B)$, constituée de 10 graines. Remarquons cependant que la graine G_5 est "identique" à la graine G, modulo un changement de numérotation simultanée des variables et des lignes et colonnes de la matrice d'échange de G ; il en est de même des quatre autres paires de graines G_i et G_{5+i}, $1 \leq i \leq 4$. Notre algèbre amassée est donnée comme suit.

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathrm{X}, B) = \mathcal{A}(G) = \mathbb{Z}\left[x_1, x_2, \frac{x_2+1}{x_1}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}, \frac{x_1+1}{x_2}\right].$$

L'algèbre amassée précédente a la particularité d'être *engendrée par un nombre fini de variables amassées*, on dit *qu'elle est de type fini.* Ce n'est généralement pas le cas pour toute algèbre amassée. Le problème de la finitude des variables est un problème très intéressant dans l'étude des algèbres amassées, et il fait appel à de nombreux domaines des mathématiques comme par exemple la combinatoire, la géométrie, la théorie des représentations. Pour une algèbre amassée de rang 2, la matrice d'échange d'une de ses graines a la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, avec $b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On vérifie par un calcul rapide que, pour la classe d'algèbres amassées de rang 2, les relations d'échange sont de la forme

$$y_{t-1}y_{t+1} = \begin{cases} y_t^b + 1, & \text{si } t \text{ est impair}\,; \\ y_t^c + 1, & \text{si } t \text{ est pair.} \end{cases}$$

Dans la formule ci-dessus, y_{t-1} et y_{t+1} sont échangeables suivant la mutation dans la direction 1 dans le cas où t est pair, et dans la direction 2 si t est impair. Les exemples précédemment traités nous montrent que les variables amassées s'expriment comme des fractions rationnelles en les x_i, et dans ces fractions, le dénominateur est toujours un monôme (et non un polynôme). De plus toutes ces fractions sont à coefficients entiers positifs ! Nous terminons cette première présentation par quelques résultats qui résument ces observations. Soient un entier naturel non nul n et $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, ..., x_n)$, $\mathrm{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; on désigne par $\mathbb{Z}[\mathrm{X}^{\pm 1}] = \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers et à variables dans X : ce sont les fractions rationnelles de la forme

$$\frac{p(x_1, \ldots, x_n)}{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_+$, et $p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}] = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Théorème 2.2 (Phénomène Laurent). *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice anti-symétrisable, alors l'algèbre amassée $\mathcal{A}(B)$ est une sous-algèbre de* $\mathbb{Z}[\mathrm{X}^{\pm 1}] = \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$.

Ce résultat est démontré dans un cadre plus général dans [1], Théorème 3.1.

Conjecture de positivité soient (X, B) une graine avec $\mathrm{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, et χ l'ensemble des variables amassées de $\mathcal{A}(\mathrm{X}, B)$; S. Fomin et A. Zelevinsky conjecturent dans [1] que $\chi \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$:

2.2 Algèbres amassées et représentations de carquois

Soient n un entier naturel strictement positif, et $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$. On se restreint au cas des matrices anti-symétriques et on notera $\mathrm{Skew}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. À toute matrice anti-symétrique $B \in Skew_n(\mathbb{Z})$ on associe un carquois $\Gamma_*(B)$ de la façon suivante :
– les points de $\Gamma_*(B)$ sont numérotés de 1 à n.
– Si le coefficient $b_{ij} > 0$ alors $\Gamma_*(B)$ a b_{ij} flèches distinctes de i vers j.

On obtient la remarque suivante.

Lemme 2.3. *Soit $\mathcal{Q}_n$ la famille des carquois finis sans boucles, ayant n points et ne possédant pas de cycles orientés de longueur deux.*
Alors la correspondance

$$\Gamma_* : Skew_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{Q}_n : B \longmapsto \Gamma_*(B)$$

est une bijection.

Preuve Il est clair que la correspondance Γ_* est bien définie. En effet, si $B = (b_{ij})$ est anti-symétrique, alors le carquois $\Gamma_*(B)$ n'a pas de boucle car $b_{ii} = 0$ pour tout $i \in [1, n]$, et il ne comporte pas non plus de cycle de longueur deux puisque l'anti-symétrie de B exige que pour toute paire $i, j \in [1, n]$, $b_{ij} = -b_{ji}$, d'où ces deux coefficients ne sauraient être tous deux strictement positifs. Soit maintenant $Q = (Q_0, Q_1) \in \mathcal{Q}_n$, on sait par définition de $\mathcal{Q}_n$ que $Q_0 = [1, n]$. Pour deux points $i, j \in [1, n]$, on pose
$Q_1(i, j) = \{\alpha \in Q_1 : \mathtt{s}(\alpha) = i \text{ et } \mathtt{b}(\alpha) = j\}$, où $\mathtt{s}$ et $\mathtt{b}$ désignent les applications source et but liées au carquois Q. Q étant fini, l'ensemble Q_1 de

ses flèches est également fini, on note $|Q_1(i,j)|$ le nombre d'éléments dans $Q_1(i,j)$, ce nombre est en fait égal au nombre de flèches de i vers j dans Q . Comme Q ne contient pas de cycle de longueur deux, il vient que pour tous $i \neq j$, les ensembles $Q_1(i,j)$ et $Q_1(j,i)$ ne sont pas simultanément non vides. Nous pouvons alors sans ambiguïté associer à Q une matrice $\Gamma'_*(Q) = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ comme suit.

Pour $i,j \in [1,n]$, $b_{ij} = \begin{cases} |Q_1(i,j)| & \text{si } Q_1(i,j) \neq \emptyset, \\ -|Q_1(i,j)| & \text{si } Q_1(j,i) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } Q_1(i,j) = Q_1(j,i) = \emptyset. \end{cases}$

Q étant sans boucle et sans cycle de longueur deux, on a $b_{ii} = |Q_1(i,i)| = 0$ et $b_{ij} = -b_{ji}$ pour tous $i,j \in [1,n]$. Ainsi, $\Gamma'_*(Q) \in Skew_n(\mathbb{Z})$, on obtient une application

$$\Gamma'_* : \mathcal{Q}_n \longrightarrow Skew_n\mathbb{Z} : \quad Q \longmapsto \Gamma'_*(Q).$$

On voit immédiatement que les applications Γ_* et Γ_* sont inverses l'une l'autre, d'où le résultat. ▪

On peut alors poser la définition suivante. Si (X, B) est une graine dans $\mathcal{F}$ et k un indice dans $[1,n]$, si $Q = \Gamma_*(B)$ et si $\mu_k(\mathrm{X}, B) = (\mathrm{X}', B')$ avec $Q' = \Gamma_*(B')$, on pose $Q' = \mu_k(Q)$, et on dit que le carquois Q' est obtenu du carquois Q par mutation dans la direction k (ou encore par mutation au point k).

Proposition 2.4. *Soit $Q \in \mathcal{Q}_n$ et $Q' = \mu_k(Q)$. Alors Q' est obtenu de Q selon l'algorithme suivant :*
(1) On renverse le sens de toutes les flèches de but ou de source k.
(2) Si Q admet r_{ij} chemins de longueur deux du point i au point j et passant par le point k, alors on doit ajouter r_{ij} flèches de i vers j dans Q'.
(3) On doit ensuite enlever successivement les pairs de flèches qui forment des cycles orientés de longueur deux(jusqu'à obtenir un carquois sans cycle orienté de longueur deux).

Preuve C'est la traduction en terme de carquois de la notion de mutation telle introduite dans la definition 2.7. ■

Exemple 2.13.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow - - - - - - - - \longrightarrow \quad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll, bend left=15] \arrow[ll, bend right=15] \end{tikzcd}$$

$$\mu_1 \Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow - - - - - - - - \longrightarrow \quad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & \\ 2 & & 3 \arrow[ul] \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

2.3 Les algèbres amassées de type fini

Définition 2.14. Une algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est dite **de type fini** si l'ensemble $\mathcal{G}$ des graines est fini.

Théorème 2.5. [[2] : Théorème 1.8] *Soient $\mathcal{G}$ une classe d'équivalence par mutations d'une graine G et $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ une algèbre amassée. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est de type fini.

(ii) Il n'y a qu'un nombre fini d'amas.

(iii) Il n'y a qu'un nombre fini de variables amassées.

(iV) L'un des carquois associé à une graine dans $\mathcal{G}$ est de type Dynkin. ■

Remarque 2.15. Si $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est de type fini alors il devient évident que le nombre de carquois associés aux graines dans $\mathcal{G}$ est fini. Cependant la réciproque est fausse. Considérons en effet la graine $G = (\{x_1, x_2\}, \mathrm{B})$ du corps ambiant $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, x_2)$, où

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\Gamma_*(\mathrm{B})$ est le carquois de Kronecker $1 \leftleftarrows 2$. On observe que

$$\mu_1(\mathrm{B}) = \mu_2(\mathrm{B}) = \mathrm{B}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vient que $\Gamma_*(\mathrm{B}')$ est le carquois $1 \rightrightarrows 2$, isomorphe au carquois de Kronecker précédent. Ainsi chaque graine dans la classe d'équivalence $\mathcal{G}$ de la graine G a pour matrice d'échange B ou B′, on n'a alors que deux carquois associés aux graines dans $\mathcal{G}$ et aucun de ces deux carquois n'est de type Dynkin, d'où l'algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ n'est pas de type fini.

Proposition 2.6. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre amassée de type fini correspondant à un carquois de type Dynkin $\mathcal{Q}$, alors le nombre de variables amassées est égal au nombre de modules indécomposables de mod-$K\mathcal{Q}$ plus n.*
En effet, des calculs faits donnent les résultats suivants :

(1) Pour A_n : $n(n+3)/2$;
(2) Pour D_n : n^2 ;
(3) Pour E_6 : 42 ;
(4) Pour E_7 : 70 ;
(5) Pour E_8 : 128. ■

Pour le nombre des modules indécomposables de mod-$K\mathcal{Q}$, on peut se référer à [[6] chapitre VII (5.10)].

3 Algèbres amassées avec coefficients

Pour les algèbres amassées avec coefficients, on se donne un groupe abélien multiplicatif sans torsion $\mathbb{P}$ qui tient lieu de "groupe de coefficients", et on considère l'algèbre de groupe $\mathbb{ZP}$. Le corps ambiant $\mathcal{F}$ prend la forme $\mathbb{ZP}(x_1, \ldots, x_n)$. Dans cette section nous allons présenter *les algèbres amassées dites de type géométrique.*

On fixe pour la suite deux entiers naturels non nuls m et n tel que $m \geq n$, et le corps des fractions rationnelles $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_m)$, à m variables algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, qui tient lieu de corps ambiant. On pose encore pour tout entier naturel non nul k, $[1, k] = \{1, \ldots, k\}$. On note aussi $\tilde{\mathrm{X}} = \{x_1, \ldots, x_m\}$;

3.1 Définitions

Définition 3.1. Une graine de type géométrique dans $\mathcal{F}$ est une paire $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ où

- $\tilde{\mathrm{X}} = \{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq \mathcal{F}$ est une base de transcendance de $\mathcal{F}$: c'est-à-dire, un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ à m éléments algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et engendrant $\mathcal{F}$.
- $\tilde{\mathrm{B}} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{Z})$ est une matrice dont les lignes sont étiquetées par $[1, m]$ et les colonnes étiquetées par un sous-ensemble à n éléments $\mathbf{ex} \subseteq [1, m]$; et satisfaisant à la condition suivante :
  La sous-matrice B carrée d'ordre n de $\tilde{\mathrm{B}}$, dont les lignes et les colonnes sont étiquetées par $\mathbf{ex}$ est anti-symétrisable.

L'exemple qui suit permet de mieux comprendre la définition précédente.

Exemple 3.2. Les exemples rencontrés dans la section précédente sont encore valides ici. En plus de ceux-là prenons : $m = 8$; $n = 4$;

$$\tilde{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

avec les colonnes de $\tilde{\mathrm{B}}$ étiquetées par $\mathbf{ex} = \{3, 4, 5, 6\}$, les éléments de **ex** étant notés dans l'ordre naturel croissant. Alors $\tilde{\mathrm{B}} = (b_{ij})_{\substack{i \in [1,m] \\ j \in \mathbf{ex}}}$. Notons $b_{i\bullet}$, $1 \leq i \leq m$, les lignes de $\tilde{\mathrm{B}}$, ses colonnes sont notées $b_{\bullet k}$, $k \in \mathbf{ex}$, ainsi la "première" , la "deuxième", la "troisième" et la "quatrième" colonne de $\tilde{\mathrm{B}}$ sont respectivement notées $b_{\bullet 3}$, $b_{\bullet 4}$, $b_{\bullet 5}$ et $b_{\bullet 6}$. La sous-matrice B de $\tilde{\mathrm{B}}$ étiquetée sur les lignes et les colonnes par **ex** est tout simplement la matrice carrée d'ordre 4 formée à partir des lignes $b_{3\bullet}$, $b_{4\bullet}$, $b_{5\bullet}$ et $b_{6\bullet}$; on obtient

$$\mathrm{B} = (b_{ij})_{i,j \in \mathbf{ex}} = \begin{pmatrix} b_{3\bullet} \\ b_{4\bullet} \\ b_{5\bullet} \\ b_{6\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}).$$

B est anti-symétrique, d'où $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ est une graine de type géométrique dans $\mathcal{F}$.

Les relations d'échange gardent la même expression que le cas des algèbres amassées sans coefficients. Si $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ est une graine dans $\mathcal{F}$, pour chaque indice $k \in \mathbf{ex}$, on définit un nouvel élément $x'_k \in \mathcal{F}$ par :

$$x'_k = \frac{\prod\limits_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod\limits_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}}{x_k} \tag{3.1}$$

On pose ensuite

$$\tilde{\mathrm{X}}_k = (\tilde{\mathrm{X}} - \{x_k\}) \cup \{x'_k\} \,. \tag{3.2}$$

On note P_k le polynôme donné par l'équation

$$P_k = x_k x'_k = \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}. \tag{3.3}$$

On peut à présent préciser la notion d'amas et de variables amassées pour une graine donnée.

Définition 3.3. Soit $G = (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ une graine dans $\mathcal{F}$, les colonnes de $\tilde{\mathrm{B}}$ étant étiquetées par un sous-ensemble à n éléments $\mathbf{ex} \subseteq [1, m]$. Alors $\tilde{\mathrm{X}}$ est partitionné en deux blocs : $\mathrm{X} = \{x_j \,/\, j \in \mathbf{ex}\}$ et $\mathrm{C} = \tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X}$.
• Les indices dans **ex** sont dits **échangeables** tandis que X est appelé **amas** de la graine G, et les éléments de X variables amassées de la graine G.
• La sous-matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de $\tilde{\mathrm{B}}$ dont les lignes et les colonnes sont étiquetées par **ex** est appelée la **partie principale** de $\tilde{\mathrm{B}}$ ou encore la **matrice d'échange** de la graine.

Avant de continuer, introduisons la notation suivante : pour $\tilde{\mathrm{X}} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, on pose $\tilde{\mathrm{X}}^{\pm 1} = \left\{x_1, \ldots, x_m, x_1^{-1}, \ldots, x_m^{-1}\right\}$, et on considère l'anneau $\mathbb{Z}[\tilde{\mathrm{X}}^{\pm 1}]$, qui est l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers et à variables dans $\tilde{\mathrm{X}}$. On fait de même pour chaque sous-ensemble de $\tilde{\mathrm{X}}$.

Remarque 3.4. Soit $G = (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ une graine, X et $\mathrm{C} = \tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X}$ comme dans la définition 3.3.
(i) Les éléments de C sont les générateurs du groupe abélien multiplicatif libre $\mathbb{P} =< \mathrm{C} >= \left\{ \prod_{x \in \mathrm{C}} x^{t_x} : \; t_x \in \mathbb{Z} \right\}$, mentionné dès le début de cette section. Les éléments de $\mathbb{P}$ sont les monômes en les variables de $\mathrm{C}^{\pm 1}$. Le groupe $\mathbb{P}$ contient les coefficients pour l'algèbre amassée à construire, $\mathbb{Z}\mathbb{P} = \mathbb{Z}[\mathrm{C}^{\pm 1}]$ est l'anneau (le domaine d'intégrité) contenant les coefficients et

$\mathcal{F} = \mathbb{ZP}(x_k : k \in \mathbf{ex}) = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_m)$ est le corps de base dans lequel vit l'algèbre amassée à construire. Par abus de langage, nous appellerons C, **ensemble-coefficient** attaché à la graine G

(ii) Pour chaque indice échangeable k, les graines $G = (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ et $\mu_k(G) = (\tilde{\mathrm{X}}_k, \mu_k(\tilde{\mathrm{B}}))$ partagent le même ensemble-coefficient $\tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X} = \mathrm{C} = \tilde{\mathrm{X}}_k - \mathrm{X}_k$. Cela se voit aisément à partir des relations d'échange (3.1)-(3.2).

Définissons aussi la notion suivante qu'on rencontre dans [3].

Définition 3.5. Soit $G = (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ une graine, X et $\mathrm{C} = \tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X}$ comme dans la définition 3.3. La graine G est dite **co-première** si les n polynômes $P_k = P_k(\mathrm{X}) = x_k x'_k = \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}$ sur $\mathbb{ZP} = \mathbb{Z}[\mathrm{C}^{\pm 1}]$ et à variables dans l'amas X, sont deux à deux co-premiers sur $\mathbb{ZP} = \mathbb{Z}[\mathrm{C}^{\pm 1}]$.

On commence par attacher à une graine donnée des algèbres proches des algèbres amassées.

Définition 3.6. Soit $G = (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ une graine dans $\mathcal{F}$ dont $\mathbf{ex}$ est l'ensemble des indices échangeables, $\mathrm{X} = \{x_k : k \in \mathbf{ex}\}$ l'amas et $\mathrm{C} = \tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X}$ l'ensemble-coefficient .

(a) On désigne par $\mathcal{U}(G)$ la sous-$\mathbb{Z}[\mathrm{C}^{\pm 1}]$-algèbre de $\mathcal{F}$ donnée par la formule

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(G) = &\ \mathbb{Z}[\mathrm{C}^{\pm 1}][\mathrm{X}^{\pm 1}] \cap \Big(\bigcap_{k \in \mathbf{ex}} \mathbb{Z}[\mathrm{C}^{\pm 1}][\mathrm{X}_k^{\pm 1}]\Big) \\ = &\ \mathbb{Z}[\tilde{\mathrm{X}}^{\pm 1}] \cap \Big(\bigcap_{k \in \mathbf{ex}} \mathbb{Z}[\tilde{\mathrm{X}}_k^{\pm 1}]\Big). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{U}(G)$ est constitué des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont exprimés comme des polynômes de Laurent sur $\mathbb{Z}[\mathrm{C}^{\pm 1}]$ en les variables de chacun des amas X, X_k, avec $k \in \mathbf{ex}$. L'algèbre $\mathcal{U}(G)$ est appelée **borne supérieure** associée à la graine G.

(b) **La borne inférieure** $\mathcal{L}(G)$ associée à la graine G est la sous-$\mathbb{Z}[\mathrm{C}^{\pm 1}]$-algèbre de $\mathcal{F}$ donnée par la formule

$$\mathcal{L}(G) = \mathbb{Z}[\mathrm{C}^{\pm 1}][x_k, x'_k;\ k \in \mathbf{ex}],$$

où pour chaque $k \in \mathbf{ex}$, les variables x_k et x'_k sont liées par les relations d'échange (3.1)-(3.2). En d'autre termes, $\mathcal{L}(G)$ est la sous-$\mathbb{Z}[\mathrm{c}^{\pm 1}]$-algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée par l'union des $n+1$ amas X, $\mathrm{X}_k, k \in \mathbf{ex}$.

On veut à présent introduire la notion de mutation de graines. Les conditions de la définition 3.1 sont préservées par les mutations matricielles et les relations d'échange. Plus précisément, on a le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soit* $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ *une graine dans* $\mathcal{F}$ *dont* **ex** *est le sous-ensemble des indices échangeables, et* B *la partie principale de* $\tilde{\mathrm{B}}$. *Pour tout* $k \in \mathbf{ex}$, *la paire* $\mu_k(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}}) = (\tilde{\mathrm{X}}_k, \mu_k(\tilde{\mathrm{B}}))$ *est encore une graine. De plus, la partie principale de* $\mu_k(\tilde{\mathrm{B}})$ *est* $\mathrm{B}' = \mu_k(\mathrm{B})$.

Preuve La démonstration de ce lemme est une conséquence immédiate de la preuve du lemme 2.1. ∎

Cela mène à la définition suivante.

Définition 3.7. Soit $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ une graine dans $\mathcal{F}$. Pour chaque indice échangeable $k \in \mathbf{ex}$, la **mutation dans la direction** k transforme la graine $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ en une autre graine $\mu_k(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}}) = (\tilde{\mathrm{X}}', \tilde{\mathrm{B}}')$ où l'ensemble $\tilde{\mathrm{X}}' = \tilde{\mathrm{X}}_k = \tilde{\mathrm{X}} - \{x_k\} \cup \{x'_k\}$ est donné par les formules (3.1)–(3.2), et $\tilde{\mathrm{B}}' = \mu_k(\tilde{\mathrm{B}})$.

Remarque 3.8. Nous savons déjà que la mutation de graine est une opération involutive qui induit une relation d'équivalence appelée "équivalence par mutations", sur l'ensemble des graines dans $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{G}$ la classe d'équivalence d'une graine $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$. Alors toutes les graines $(\tilde{\mathrm{X}}', \tilde{\mathrm{B}}') \in \mathcal{G}$ partagent le même ensemble-coefficient $\mathrm{c} = \tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X} = \tilde{\mathrm{X}}' - \mathrm{X}'$.

La définition d'une algèbre amassée avec coefficients (et de type géométrique) suit.

Définition 3.9. Soit $\mathcal{G}$ une classe d'équivalence par mutations d'une graine initiale $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$, désignons par $\chi = \chi(\mathcal{G})$ l'union de tous les amas des graines dans $\mathcal{G}$. Alors les éléments de χ sont appelés **variables amassées**.

L'algèbre amassée de rang n $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\tilde{\mathrm{B}})$ associée à $\mathcal{G}$ est la sous-$\mathbb{Z}[\mathrm{c}^{\pm 1}]$-algèbre du corps ambiant $\mathcal{F}$ engendrée par les variables amassées :

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\tilde{\mathrm{B}}) = \mathbb{Z}[\mathrm{c}^{\pm 1}, \chi].$$

L'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ sera dite **de type fini** si l'ensemble $\mathcal{G}$ des graines est fini.

Exemple 3.10. Prenons $m = n+2 = 4$, alors le corps ambiant à considérer est $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, à quatre variables libres. Comme graine initiale, nous choisissons $G = \left(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \tilde{\mathrm{B}}\right)$ où $\tilde{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; avec ses colonnes étiquetées par **ex** $= \{2, 3\}$. Ainsi, posant $\tilde{\mathrm{X}} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, le premier amas est $\mathrm{X} = \{x_2, x_3\}$ tandis que les deux premières variables amassées sont $y_1 = x_2$ et $y_2 = x_3$; l'ensemble-coefficient est $\mathrm{c} = \tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X} = \{x_1, x_4\}$, et par suite $\mathbb{P} = <\mathrm{c}> = \{x_1^s x_4^t : s, t \in \mathbb{Z}\}$. Le lecteur peut prédire aisément que la quatrième variable x_4 de $\mathcal{F}$ est redondante pour le calcul des variables amassées de notre algèbre, car la dernière ligne de la matrice $\tilde{\mathrm{B}}$ est nulle. Nous obtenons que l'algèbre amassée $\mathcal{A}(G)$ est de type fini. Après avoir effectué 3 séries de mutations dans toutes les directions (à savoir, 2 directions chaque fois), l'on obtient exactement 6 graines distinctes mutation-équivalentes à G, lesquelles constituent la liste de toutes les graines mutation-équivalentes à G ; et il vient qu'il n'existe que 6 variables amassées. La liste de ces graines suit :

$$\mathrm{G} = \left(\left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mu_2(\mathrm{G}) = \left(\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & \frac{x_1+x_3}{x_2} & x_3 & x_4 \end{array} \right\}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mu_3(\mathrm{G}) = \left(\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \frac{x_2^2+x_1}{x_3} & x_4 \end{array} \right\}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mu_{3,2}(\mathrm{G}) = \left(\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & \frac{x_1+x_3}{x_2} & \frac{x_1x_2^2+x_1^2+2x_1x_3+x_3^2}{x_3x_2^2} & x_4 \end{array} \right\}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mu_{2,3}(\mathrm{G}) = \left(\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & \frac{x_2^2+x_1+x_3}{x_2x_3} & \frac{x_2^2+x_1}{x_3} & x_4 \end{array} \right\}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mu_{2,3,2}(\mathrm{G}) = \left(\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & \frac{x_2^2+x_1+x_3}{x_2x_3} & \frac{x_1x_2^2+x_1^2+2x_1x_3+x_3^2}{x_3x_2^2} & x_4 \end{array} \right\}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

L'algèbre amassée $\mathcal{A}(G)$, de rang 2, est donc la sous-$\mathbb{Z}[C^{\pm 1}]$-algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée par les 6 variables amassées et est de type fini. Ainsi, $\mathcal{A}(G)$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ donnée par la formule :

$$\mathcal{A}(G) = \mathbb{Z}[x_1, x_4, x_1^{-1}, x_4^{-1}; \, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]$$

où les variables amassées y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 et y_6 sont données par :

$y_1 = x_2\,$; $\;y_2 = x_3\,$; $\;y_3 = \frac{x_1+x_3}{x_2}\,$; $\;y_4 = \frac{x_2^2+x_1}{x_3}\,$; $\;y_5 = \frac{x_1x_2^2+x_1^2+2x_1x_3+x_3^2}{x_3x_2^2}$ et $y_6 = \frac{x_2^2+x_1+x_3}{x_2x_3}$; les différents amas(au nombre de 6) sont :

$\{y_1, y_2\} = \{x_2, x_3\}$; $\{y_3, y_2\} = \left\{\frac{x_1+x_3}{x_2}, x_3\right\}$; $\{y_1, y_4\} = \left\{x_2, \frac{x_2^2+x_1}{x_3}\right\}$;
$\{y_3, y_5\} = \left\{\frac{x_1+x_3}{x_2}, \frac{x_1x_2^2+x_1^2+2x_1x_3+x_3^2}{x_3x_2^2}\right\}$; $\{y_6, y_4\} = \left\{\frac{x_2^2+x_1+x_3}{x_2x_3}, \frac{x_2^2+x_1}{x_3}\right\}$;
$\{y_6, y_5\} = \left\{\frac{x_2^2+x_1+x_3}{x_2x_3}, \frac{x_1x_2^2+x_1^2+2x_1x_3+x_3^2}{x_3x_2^2}\right\}$

Faisons la remarque suivante : dans la définition 3.9, on pose $\mathcal{P}$ l'ensemble constitué de tous les coefficients apparaissant dans les relations d'échange (3.1)-(3.2), pour chaque graine dans la classe d'équivalence $\mathcal{G}$; autrement dit, chaque élément de $\mathcal{P}$ est un monôme en les variables de l'ensemble-coefficient C, ainsi $\mathcal{P} \subset \mathbb{P} = <\mathrm{C}> = \left\{\prod_{x\in\mathrm{C}} x^{t_x} : \ t_x \in \mathbb{Z}\right\}$. Alors l'algèbre amassée $\mathcal{G} = \mathcal{A}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}}) = \mathcal{A}(\tilde{\mathrm{B}})$ est en fait une sous- $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$-algèbre du corps ambiant $\mathcal{F}$. Et $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$ est la plus petite sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de $\mathcal{F}$ contenant les coefficients des variables amassées de $\mathcal{A}$.

Jusqu'ici, on a associé à une graine G donnée, trois algèbres : la borne supérieure $\mathcal{U}(G)$, l'algèbre amassée $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$ et la borne inférieure $\mathcal{L}(G)$. On a une autre algèbre "intermédiaire" entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{U}(G)$: c'est l'algèbre amassée supérieure définie comme suit.

Définition 3.11. Soit $G_o = (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ une graine dont **ex** est l'ensemble des indices échangeables. **L'algèbre amassée supérieure** $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{A}}(G_o)$ définie par G_o est l'intersection des sous-algèbres $\mathcal{U}(G) \subseteq \mathcal{F}$ pour toutes les graines $G \sim G_o$. En d'autres termes, $\bar{\mathcal{A}}$ est constituée des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont des polynômes de Laurent sur $\mathbb{ZP} = \mathbb{Z}[\mathrm{c}^{\pm 1}]$ en les variables amassées de n'importe quelle graine G mutation-équivalente à G_o.

Nous pouvons facilement établir les relations suivantes.

Lemme 3.2. *Soit G_o une graine, alors pour toute graine $G \sim G_o$ on a les inclusions :*

$$\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{A}(G_o); \ \ \mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{U}(G)$$

Preuve Posons $G_o = (\tilde{\mathrm{X}} = \{x_1, \ldots, x_m\}, \tilde{\mathrm{B}}_o)$, soit **ex** l'ensemble des indices échangeables et $\mathbb{ZP} = \mathbb{Z}[\mathrm{c}^{\pm 1}]$, l'anneau des coefficients. Soit maintenant

$G = (\tilde{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\}, \tilde{\mathrm{B}})$ mutation-équivalente à G_o. Alors $\mathcal{L}(G)$ est la sous-$\mathbb{ZP}$-algèbre de $\mathcal{F}$ engendrée par l'union des $n+1$ amas $\tilde{Y}$ et $\tilde{Y}_k$ pour $k \in$ **ex** (voir Définition 3.6), tandis que $\mathcal{A}(G_o)$ est engendrée sur $\mathbb{ZP}$ par l'union de tous les amas des graines mutation-équivalentes à G_o. Il suit immédiatement que $\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{A}(G_o)$. Établir l'inclusion $\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{U}(G)$ revient à montrer que pour chaque indice échangeable $i \in \mathbf{ex}$, y_i et y'_i appartiennent à chacune des algèbres de polynômes de Laurent, $\mathbb{ZP}[Y^{\pm 1}]$, $\mathbb{ZP}[Y_k^{\pm 1}]$, avec $k \in \mathbf{ex}$. Fixons $i \in \mathbf{ex}$, on se rappelle que $y'_k = y_k^{-1} P_k$, où suivant les équations (3.1) et (3.3), P_k est un polynôme sur $\mathbb{ZP}$ en les variables de $Y - \{y_k\}$. La mutation de graine étant involutive, on a aussi $y_k = {y'}_k^{-1} P'_k$ où P'_k est un polynôme sur $\mathbb{ZP}$ en les variables dans $Y_k - \{y'_k\} = ((Y - \{y_k\}) \cup \{y'_k\}) - \{y'_k\} = Y - \{y_k\}$. Ainsi, y_k, y'_k sont éléments de $\mathbb{ZP}[Y^{\pm 1}]$ et $\mathbb{ZP}[Y_k^{\pm 1}]$. On déduit alors que pour toutes paires d'indices $i, k \in \mathbf{ex}$ les éléments y_i, y'_i appartiennent à $\mathbb{ZP}[Y^{\pm 1}]$ et $\mathbb{ZP}[Y_k^{\pm 1}]$. D'où le résultat. ■

Il existe de nombreuses propriétés et divers problèmes sur les algèbres ci-dessus. Par exemple, quand et est-ce que chacune de ces algèbres est de type fini sur $\mathbb{ZP} = \mathbb{Z}[\mathrm{c}^{\pm 1}]$? Sous quelles conditions a-t-on l'égalité entre deux de ces algèbres ? En vertu de leurs définitions, $\mathcal{A}$ et $\bar{\mathcal{A}}$ sont invariantes par mutations de graines. Sous quelles hypothèses la borne supérieure ou la borne inférieure est-elle invariante par mutations ? Le lecteur est invité à consulter [[3] section 1]. Quand à nous, nous exposons quelques résultats déjà obtenus sur les algèbres amassées. La liste de ces résultats est bien sûr très loin d'être complète, étant donné le dynamisme qui caractérise la recherche sur les algèbres amassées et ses nombreux domaines connexes.

3.2 Quelques résultats sur les algèbres amassées

Sauf mention du contraire, les algèbres amassées traitées dans cette section sont de type géométrique ; nous adoptons les notations introduites en (3.1). Énonçons de prime abord le théorème de Fomin et Zelevinsky sur le comportement des variables amassées ; ce théorème est baptisé "*phénomène Laurent*"

Théorème 3.3. (**Phénomène Laurent :** [[1], Théorème 3.1]) *Dans une algèbre amassée, chaque variable amassée s'exprime en fonction de chaque amas* X *comme un polynôme de Laurent à coefficients dans l'anneau de group* $\mathbb{ZP}$ *et à variables dans* X.

En utilisant les notations introduites dans la section 3.1, l'énoncé précédent se reformule comme suit. Soit G_o une graine et $\mathcal{G}$ sa classe d'équivalence par mutation. L'algèbre amassée $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G_o) = \mathcal{A}(\mathcal{G})$ est contenue dans l'algèbre amassée supérieure $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{A}}(G_o) = \bar{\mathcal{A}}(\mathcal{G})$.

Le "phénomène Laurent" démontré dans [1] pour les algèbres amassées quelconques non nécessairement de type géométrique, admet une version plus élaborée pour les algèbres amassées de type géométrique comme suit :

Proposition 3.4. [[2], Proposition 11.2] *Dans une algèbre amassée, chaque variable amassée s'exprime en fonction de chaque amas* X *comme un polynôme de Laurent à coefficients dans l'anneau de group* $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$ *et à variables dans* X.

Il existe des critères sous lesquels la borne supérieure est invariante par mutations et coïncide avec l'algèbre amassée supérieure. On a d'abord le résultat suivant.

Théorème 3.5. [[3] : Théorème 1.5] *On suppose que G et G' sont deux graines mutation-équivalentes et toutes deux co-premières. Alors* $\mathcal{U}(G) = \mathcal{U}(G')$.

On déduit le Corollaire ci-après.

Corollaire 3.6. *Si toutes les graines mutation-équivalentes à une graine G_o sont co-premières, alors la borne supérieure $\mathcal{U}(G)$ est indépendante du choix de $G \sim G_o$, et ainsi, elle est égale à l'algèbre amassée supérieure $\bar{\mathcal{A}}(G_o)$.*

L'hypothèse de co-primalité dans le corollaire 3.6 est satisfaite pour une large classe d'algèbres amassées (de type géométrique).

Proposition 3.7.[[3], Proposition 1.8] *Soit* $G = (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ *une graine. Si la matrice* $\tilde{\mathrm{B}}$ *est de rang* n*, alors toute graine mutation-équivalente à* G *est co-première.*

En mettant ensemble le Corollaire 3.6 et la Proposition 3.7 on déduit le résultat suivant qui établit l'invariance par mutation de la borne supérieure sous l'hypothèse de la co-primalité.

Corollaire 3.8. *Soit* $G = (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ *une graine telle que la matrice* $\tilde{\mathrm{B}}$ *soit de rang* n*, alors la borne supérieure* $\mathcal{U}(G)$ *dépend uniquement de la classe d'équivalence par mutations de* G *, et ainsi coïncide avec l'algèbre amassée supérieure* $\bar{\mathcal{A}}(G)$*. En particulier* $\mathcal{U}(G) = \bar{\mathcal{A}}(G)$ *est invariante par mutation.*

Le Théorème 3.3 est une conséquence immédiate du résultat ci-après, qui précise les inclusions entre une algèbre amassée et ses différentes algèbres proches définies dans la section précédente.

Théorème 3.9. [[3], Corollaire 1.12] *Soit* G_o *une graine. Alors pour toute graine* $G \sim G_o$ *on a*

$$\mathcal{L}(G) \subset \mathcal{A}(G_o) \subset \bar{\mathcal{A}}(G_o) \subset \mathcal{U}(G).$$

Regardons à présent le problème de la finitude des variables amassées.

3.3 Classification de Cartan-Killing des algèbres amassées

La première caractérisation des algèbres amassées de type fini est obtenue en 2002 par Fomin et Zelevinsky dans [2]. En 2004 Barot, Geiss et Zelevinsky obtiennent dans [4] une nouvelle caractérisation plus élégante, qui se trouve être programmable sur ordinateur alors que celle de 2002, purement théorique et difficile à appliquer, n'est pas programmable. La classification des algèbres amassées de type fini obtenue par les auteurs ci-dessus s'avère être identique à la fameuse classification de Cartan-Killing des algèbres de Lie semisimples. Nous présentons dans les lignes suivantes le résultat qui résume les travaux de Fomin, Zelevinsky, Barot et Geiss. Rappelons pour cela la définition suivante.

Définition 3.12. Une algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est dite de type fini si la classe d'équivalence par mutations $\mathcal{G}$ est finie.

Nous avons besoin d'une série de notions introduites dans [4].

Définition 3.13.
(i) Une matrice carrée *symétrisable* est dite **quasi-Cartan** si ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 2.
(ii) Une matrice quasi-Cartan $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est dite **positive** (ou encore de **de type fini**) si sa symétrisée DA est définie positive, c'est-à-dire, la forme quadratique associée à DA est définie positive, où D est la matrice diagonale à coefficients strictement positifs pour laquelle DA est symétrique.
(iii) Une matrice quasi-Cartan $A = (a_{ij})$ est une **matrice de Cartan (généralisée)** si tous ses coefficients non diagonaux sont négatifs : pour tout indice i , $a_{ii} = 2$ et, pour toute paire d'indices i, j distincts, ona $a_{ij} \leq 0$.

On sait que les algèbres amassées (de type géométrique,) sont données à partir des matrices anti-symétrisables. À une matrice anti-symétrisable, on associe des matrices de Cartan comme suit.

Définition 3.14. Soit B une matrice anti-symétrisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
(i) On appelle **compagnon de Cartan de** B toute matrice quasi-Cartan A telle que $|a_{ij}| = |b_{ij}|$ pour toute paire d'indices $i \neq j$.
(ii) Le compagnon de Cartan A de B tel que $a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -|b_{ij}| & \text{sinon,} \end{cases}$
s'appelle **homologue de Cartan de** B On le notera $A = A(\mathrm{B})$.

À une matrice anti-symétrisable B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ on associe à présent un carquois $\Gamma(B)$, ayant n points $1, \ldots, n$ et pour chaque paire i, j d'indices tels que $b_{ij} > 0$, il existe une seule flèche $i \to j$ dans Γ(B) ; ainsi, $\Gamma(B)$ est sans arcs parallèles. Par exemple à la matrice de l'exemple 2.13

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ correspond le carquois } \Gamma(\mathrm{B}) = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Rappelons qu'un cycle d'un graphe non orienté H est sous-graphe C de H de la forme

$$x_0 \overset{a_0}{\longrule} x_1 \overset{a_1}{\longrule} \cdots \overset{a_{p-1}}{\longrule} x_{p-1} = x_0$$

tel que $p \geq 2$ et les points $x_0, x_1 \ldots, x_{p-1}$ deux à deux distincts. Ainsi, C est (à isomorphisme de graphes près) le graphe C_p dont les points sont les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et les arêtes entre eux étant précisément les paires $\{i, i+1\}$, avec $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Une **corde** de C dans H est une arête de H reliant deux points non consécutifs (c'est à dire deux points non adjacents) de C . Si par exemple H est un graphe simple (c'est-à-dire, sans boucle et sans arêtes multiples), alors tout sous-graphe induit de H et isomorphe à un cycle est nécessairement sans corde. Ainsi pour le carquois $\Gamma(B)$ d'une matrice anti-symétrisable B, le graphe non orienté sous-jacent $|\Gamma(B)|$ étant un graphe simple, les cycles sans corde de $|\Gamma(\mathrm{B})|$ sont précisément ses sous-graphes induits isomorphes aux cycles C_p, pour $p \geq 3$.

Introduisons les notions suivantes définies dans [2].

Définition 3.15. Deux algèbres amassées $\mathcal{A}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{A}(\mathcal{G}') \subset \mathcal{F}'$ sur le même groupe abélien multiplicatif libre $\mathbb{P}$ sont dites **fortement isomorphes** s'il existe un isomorphisme de $\mathbb{ZP}$-algèbres $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ qui envoie une graine dans $\mathcal{G}$ sur une graine dans $\mathcal{G}'$.

Un isomorphisme comme dans la définition 3.15 envoie nécessairement chaque graine de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ sur une graine de $\mathcal{A}(\mathcal{G}')$ et induit une bijection $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ et un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{A}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\mathcal{G}')$

Chaque algèbre amassée $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}}) = \mathcal{A}(\tilde{\mathrm{B}})$ est uniquement déterminée par la matrice d'échange B modulo l'ensemble-coefficient $\mathrm{c} = \tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X}$ (ou encore, modulo le groupe $\mathbb{P} = <\mathrm{c}> = \{\prod x \in \mathrm{c} x^{t_x} : \ t_x \in \mathbb{Z}\}$). Ainsi chaque algèbre amassée sur un groupe abélien multiplicatif libre $\mathbb{P}$ appartient à une série d'algèbres amassées $\mathcal{A}(\mathrm{B}, -)$ constituée de toutes les algèbres amassées de la forme $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ où B est une matrice anti-symétrisable fixée et $\tilde{\mathrm{B}}$ est de sorte que sa partie principale soit égale à B.

Définition 3.16. Deux séries d'algèbres amassées $\mathcal{A}(\mathrm{B}, -)$ et $\mathcal{A}(\mathrm{B}', -)$ sont dites **fortement isomorphes** s'il existe une bijection entre elles, envoyant chaque algèbre amassée $\mathcal{A}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ sur une algèbre amassée $\mathcal{A}(\tilde{Y}, \tilde{\mathrm{B}}')$ qui lui est fortement isomorphe.

Cela revient à demander que les matrices d'échanges B et B′ soient mutation-équivalentes modulo un changement de numérotation simultanée des lignes et des colonnes. Nous pouvons à présent énoncer le théorème de classification des algèbres amassées de type fini. Nous résumons dans le Theorème 3.10 ci-dessous les caractérisations obtenues par Fomin, Zelevinsky, Barot et Geiss.

Théorème 3.10. [[2], Théorème 1.4, Theorème 1.8 et [4], Theorème 1.2] *Soit $G = (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ une graine dont* **ex** *désigne l'ensemble des indices échangeables et* B *la matrice d'échange anti-symétrisable, soit $\mathcal{G}$ la classe d'équivalence par mutations de G. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) L'algèbre amassée $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G) = \mathcal{A}(\tilde{\mathrm{B}})$ est de type fini.

(2) L'ensemble χ des variables amassées est fini.

(3) Pour chaque graine $G' = (\tilde{\mathrm{X}}', \tilde{\mathrm{B}}')$ dans $\mathcal{G}$, les coefficients de sa matrice d'échange $\mathrm{B}' = (b'_{kl})$ satisfont aux inégalités $|b'_{kl} b'_{lk}| \leq 3$ pour tout $k, l \in$ **ex***.*

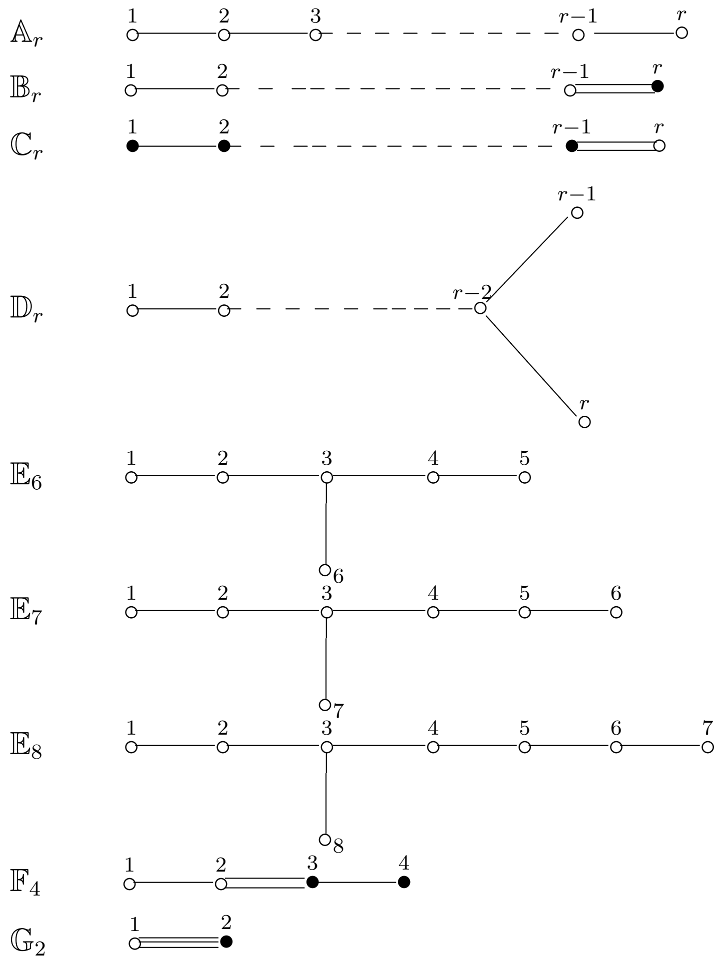
(4) $\mathcal{G}$ contient une graine $G_o = (\tilde{\mathrm{X}}_o, \tilde{\mathrm{B}}_o)$ telle que l'homologue de Cartan $A = A(\mathrm{B}_o)$ de la matrice d'échange B_o de G_o soit positive (c'est-à-dire de type fini).

(5) Tout cycle sans corde dans le graphe non orienté $|\Gamma(\mathrm{B})|$ est (cycliquement) orienté dans $\Gamma(\mathrm{B})$ et la matrice B possède un compagnon de Cartan positif.

(4') Si B et B' sont deux matrices carrées anti-symétrisables telles que $A(\mathrm{B})$ et $A(\mathrm{B}')$ soient des matrices de Cartan de type fini, alors, les séries d'algèbres amassées $\mathcal{A}(\mathrm{B}, -)$ et $\mathcal{A}(\mathrm{B}', -)$ sont fortement isomorphes si et seulement si les matrices de Cartan $A(\mathrm{B})$ et $A(\mathrm{B}')$ sont de même type (dans la classification de Cartan-Killing). Et par conséquent le type de la matrice de Cartan A dans (4) est uniquement déterminé par la classe d'équivalence $\mathcal{G}$, il définit alors le type de l'algèbre amassée $\mathcal{A}$.

Dans le théorème ci-dessus, les énoncés $(1), (2), (3), (4)$ et l'énoncé $(4')$, constituent la caractérisation obtenue par Fomin et Zelevinsky, dans un cadre plus général : Ils n'imposent pas à la matrice d'échange B d'être anti-symétrisable, mais plutôt de satisfaire à la condition moins forte de la remarque 2.2 : pour tous i, j, soit $b_{ij} = b_{ji} = 0$, soit $b_{ij}b_{ji} < 0$; (en particulier $b_{ii} = 0$ pour tout i). Ces matrices sont appelées en anglais "**sign-skew-symetric matrices**", ce que l'on peut traduire en français par **matrices anti-symétriques pour les signes**. L'équivalence entre l'énoncé (5) et les énoncés (1) $--$(4) est obtenu par Barot, Geiss, et Zelevinsky. La force de cette nouvelle et élégante caractérisation (Théorème 3.10) comparée à la première, tient du fait que pour une graine $G = (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ quelconque, on n'a pas besoin (contrairement à ce que requiert la première caractérisation de Fomin et Zelevinsky,) de calculer toutes les graines dans la classe d'équivalence $\mathcal{G}$ de G pour décider si l'algèbre amassée associée est de type fini . On a juste donc à faire le "test (5)" sur une seule graine pour décider si l'algèbre engendrée est de type fini ou non.

La classification de Cartan-Killing des matrices de Cartan de type fini (correspondant aux algèbres de Lie semisimples) comporte 9 familles distinctes dont quatre familles infinies : $\mathbb{A}_r$, $\mathbb{B}_r$, $\mathbb{C}_r$, $\mathbb{D}_r$ (r étant un entier positif non nul), et cinq familles dites exceptionnelles $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, ,$\mathbb{E}_8$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{G}_2$; représentées par des diagrammes de Dynkin. Les algèbres amassées sont donc classifiées en ces 9 types distincts.



3.4 Quelques conjectures

Définition 3.17. Un **monôme amassé** (" **cluster monomial**" en anglais) est un monôme en les variables amassées appartenant à un même amas.

Soit $\mathcal{G}$ une classe d'équivalence par mutations de graines. On définit les *cônes positifs* $\mathcal{U}_{\geq 0}(\mathcal{G})$ et $\mathcal{A}_{\geq 0}(\mathcal{G})$ par les formules :

$$\mathcal{U}_{\geq 0}(\mathcal{G}) = \bigcap_{(\tilde{\mathrm{X}},\tilde{\mathrm{B}})\in\mathcal{G}} \mathbb{Z}_{\geq 0}[\tilde{\mathrm{X}}^{\pm 1}], \qquad \mathcal{A}_{\geq 0}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathcal{G}) \cap \mathcal{U}_{\geq 0}(\mathcal{G}); \tag{3.4}$$

en d'autres termes, $\mathcal{U}_{\geq 0}(\mathcal{G})$ (ou $\mathcal{A}_{\geq 0}(\mathcal{G})$) consiste en les éléments $y \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ (ou $y \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$, respectivement) tels que, pour toute graine $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}}) \in \mathcal{G}$, l'expression de y en tant que polynôme de Laurent en les variables dans $\tilde{\mathrm{X}}$ a des coefficients (entiers) positifs. Tout élément d'un cône positif sera dit *positif*. Un élément positif sera dit *indécomposable* s'il ne peut s'écrire comme somme de deux éléments positifs.

Conjectures Soit $\mathcal{A}$ une algèbre amassée.

(1) (**conjecture de positivité : S. Fomin** & **A. Zelevinsky** dans [1]) Chaque variable amassée de $\mathcal{A}$ est un élément positif de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire ; son expression en un polynôme de Laurent en les variables dans $\tilde{\mathrm{X}}$ a des coefficients (entiers) positifs pour toute graine $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{B}})$ de $\mathcal{A}$.

(1) Tout monôme amassé est un élément positif indécomposable.

Références

[1] Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster algebras I : Foundations. J. Amer. Math Soc., 15(2) :497-529, 2002.

[2] Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster Algebras II : Finite Type Classification. 2002

[3] Arkady Berenstein, Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster Algebras III : Upper bounds and double Bruhat cells, math.RT/0305434, à paraître. dans *Duke Math. J.*

[4] Michael Barot, Christof Geiss et Andrei Zelevinsky. Cluster algebras of finite type and positive symetrizable matrices.

[5] Cluster algebras : Notes for 2004 IMCC (Chonju, Korea, August 2004) Andrei Zelevinsky

[6] Ibrahim Assem, Daniel Simson et Andrzej Skowroński. Elements of Representation Theory of Associative algebras.
I : Techniques of Representation theory. London Mathematical Society student text 65, Cambridge University Press, 2006.

[7] Grégoire Dupont. Algèbres cluster de type fini et représentations de carquois. Grégoire Dupont.
http ://www.usherbrooke.ca/mathematiques/telechargement/documents/rapp_rech/rr20.pdf