Préparation au calcul différentiel et intégral à l'université

Texte rédigé par le Comité des mathématiques
et de la statistique du Conseil des provinces atlantiques pour les sciences

Révisé par Robert Dawson (Saint Mary's University)

Traduction française réalisée par Michèle Boutin et Éric Marchand

Version adaptée par le Département de mathématiques
de l'Université de Sherbrooke

Mai 2021

Note : Cette brochure a pour objet de donner aux étudiants éventuels une bonne idée des notions préalables à des cours de calcul différentiel et intégral à l'Université de Sherbrooke, notamment pour les cours CQP 201, CQP 209, MAT 900 et MAT 901.

Un grand nombre de matières importantes des cours de mathématiques du secondaire ne sont pas abordées dans cette brochure, notamment la probabilité, l'algèbre linéaire et géométrie analytique des sections coniques. Si un sujet n'est pas traité dans cette brochure, cela ne signifie nullement qu'il est moins important que les autres. Cette brochure n'est pas conçue pour servir de manuel de cours ni de test de connaissances. De plus, les auteurs ne préconisent pas une méthode particulière d'enseignement de la matière qu'elle renferme.

Table des matières

1 Le calcul différentiel et intégral en année préparatoire

1.1 De quelles mathématiques aurai-je besoin à l'université?

Cela dépend de la discipline dans laquelle vous vous inscrirez. Il conviendrait de vérifier avec le Département ou le comité de programme en question. En règle générale, si vous visez un diplôme en sciences, vous aurez probablement besoin d'un ou de plusieurs cours de calcul différentiel et intégral. Dans certains programmes, ce sont des cours de statistique qui sont privilégiés. Pour obtenir un diplôme en physique, génie, mathématiques ou informatique (et dans certaines autres disciplines), il vous faudra des cours supplémentaires de mathématiques allant au-délà des cours de niveau collégial.

Certains départements (autres que le Département de mathématiques) offrent leurs propres cours de calcul différentiel et intégral, d'algèbre linéaire ou de statistique. Dans ce cas, vous ne serez peut-être pas tenu(e) de suivre des cours de type CQP, MAT proposés par le Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke.

1.2 Qu'est-ce que le calcul différentiel et intégral?

Le calcul différentiel et intégral est une branche des mathématiques qui porte sur les taux de variation. Il remonte à la Grèce et à la Chine antiques, mais dans sa forme actuelle, il a commencé avec Newton et Leibnitz au XVII^e siècle. On l'utilise aujourd'hui beaucoup dans de nombreux domaines scientifiques.

Les notions de base du calcul différentiel et intégral englobent la limite, la dérivée et l'intégrale. La dérivée d'une fonction est son taux de variation instantané par rapport à une autre variable. Ainsi, la dérivée de la **hauteur** (en rapport avec la position) est la **pente**; la dérivée de la **position** (en rapport avec le temps) est la **vélocité**; et la dérivée de la **vélocité** (en rapport avec le temps) est **l'accélération**.

L'intégrale d'une fonction peut être perçue par exemple comme étant l'aire se trouvant sous son graphe ou comme une sorte de total en fonction du temps. Ainsi, l'intégrale de la **pente** est (à une constante près) la **hauteur**; l'intégrale de la **vélocité** est (à une constante près) la **position** et l'intégrale de **l'accélération** (en rapport avec le temps) est la **vélocité**. Comme vous l'aurez peut-être deviné, les intégrales et les dérivées sont reliées et, dans un sens, opposées.

De nombreuses fonctions, mais pas toutes, peuvent être représentées par des expressions algébriques. Par exemple, l'aire d'un cercle est reliée à son rayon par la formule $A = \pi r^2$, et la distance d sur laquelle un corps tombe dans un temps t, en démarrant immobile, s'exprime comme suit : $d = \frac{1}{2}at^2$. Le calcul différentiel et intégral nous permet de trouver des expressions pour l'intégrale et la dérivée de la fonction à partir de son expression algébrique.

1.3 Pourquoi le calcul différentiel et intégral est-il important?

En sciences, de nombreux processus impliquant une variation ou des variables reliées sont étudiés. Si ces variables sont liées d'une façon impliquant la chance et une variation aléatoire importante, la statistique est l'un des principaux outils que l'on utilisera pour étudier les liens existants. Cependant, dans les cas où un modèle déterministe constitue au moins une approximation valable, le calcul différentiel et intégral est un outil permettant d'étudier efficacement les façons dont les variables interagissent. Les situations impliquant des taux de variation au fil du temps ou des taux de variation d'un lieu à un autre sont des exemples particulièrement importants.

La physique, l'astronomie, les mathématiques et le génie sont des domaines où le calcul différentiel et intégral joue un rôle primordial; on peut difficilement voir comment une seule de ces disciplines existerait dans sa forme moderne sans le calcul différentiel et intégral. Toutefois, la biologie, la chimie, l'économie, l'informatique et d'autres sciences utilisent aussi le calcul différentiel et intégral. De nombreuses facultés de sciences exigent donc que tous leurs étudiant(e)s suivent un cours de calcul différentiel et intégral; dans d'autres cas, l'étudiant(e) pourra peut-être choisir entre des cours de calcul différentiel et intégral, de statistique et d'informatique, par exemple.

Il faut bien comprendre que les mathématiques ne se limitent pas au calcul différentiel et intégral. L'algèbre linéaire, la probabilité, la géométrie et la combinatoire ne sont que quelques-unes des branches des mathématiques abordées dans les écoles qui sont importantes au niveau universitaire. Les compétences en matière de résolution de problèmes, qui touchent toutes les branches des mathématiques, permettent d'appliquer les mathématiques à d'autres sujets.

1.4 De quels préalables ai-je besoin?

Vous devez avoir suivi le cours de mathématiques préparatoires au calcul différentiel et intégral de 12^e année ou un cours équivalent et avoir bien compris la matière. Vous trouverez dans la seconde partie de cette brochure des exemples des choses que vous devriez pouvoir faire.

Vous n'avez pas besoin d'avoir suivi un cours de calcul différentiel et intégral au secondaire; si vous l'avez fait, ne croyez pas que vous pouvez sauter des cours ou ne pas étudier durant la première partie du cours de calcul différentiel et intégral. À l'université, le calcul différentiel et intégral est abordé plus en profondeur que dans la plupart des cours du secondaire, même si la matière semble être la même. N'oubliez pas non plus de continuer à utiliser vos compétences en algèbre et autres branches des mathématiques pour ne pas les perdre.

1.5 En quoi consiste un cours de calcul différentiel et intégral à l'université?

Vous constaterez probablement qu'à l'université les cours de calcul différentiel et intégral se déroulent à un rythme plus rapide qu'au secondaire. Vous, et vous seul(e), serez responsable de remettre vos travaux à temps et d'être présent(e) aux cours, aux contrôles et aux examens.

Vous ne pourrez réussir ce cours en vous contentant de mémoriser toute la matière; il vous faudra aussi la comprendre, chose qui ne se produira pas instantanément et que le maître ne pourra pas faire à votre place. Vous devrez faire des efforts soutenus et participer activement au cours. Si vous travaillez avec constance jusqu'à la fin, vous serez récompensé(e) de vos efforts.

La matière du cours se compose d'un nombre plutôt restreint de grands principes et d'un nombre modéré de formules que vous devrez savoir et non de centaines de raccourcis et de règles particulières. Les étudiant(e)s font souvent l'erreur, particulièrement en ce qui a trait aux problèmes sous forme d'énoncé, d'essayer d'apprendre une règle pour chaque type de problème. Ne faites pas ça; **essayez plutôt de comprendre les divers éléments des problèmes.**

Voici les étapes d'apprentissage et de maîtrise d'une nouvelle notion de calcul différentiel et intégral :

- Pour commencer, vous devriez **avant le cours lire dans votre manuel la matière qui suivra** pour avoir une idée de ce que dira l'enseignant(e). Cela vous aidera à suivre le cours et à prendre des notes plus facilement.

- Dans son cours, **l'enseignant(e) présentera la nouvelle notion**, donnera des exemples et expliquera peut-être ses liens avec d'autres notions. Il pourra aussi suggérer des façons de résoudre des problèmes.

- **Travaillez à résoudre des problèmes**, faites les travaux demandés (y compris étudier encore les problèmes si nécessaire, qu'on vous le demande ou non) et assurez-vous de comprendre ce que vous faites. Il est préférable de travailler pendant environ une heure plusieurs fois par semaine qu'une seule fois pendant longtemps. **La constance dans le travail est essentielle à l'apprentissage; les cours ne servent qu'à vous aider à vous engager dans ce processus.**

- Si vous ne comprenez pas quelque chose, déterminez bien de quoi il s'agit **et allez demander de l'aide.** Soyez prêt à expliquer au professeur(e) ou au chargé(e) de cours (ou à un(e) ami(e), à la personne-ressource du centre d'aide en mathématiques, ou à quelqu'un d'autre) ce que vous ne comprenez pas. (Dire “ je ne comprends rien ” ne sert pas à grand-chose.) Par ailleurs, n'allez pas demander à l'enseignant de vous dire comment répondre à la question 6.11 et refuser d'écouter des explications détaillées.

- Enfin, sachez que l'**on vérifiera vos connaissances** par des questionnaires d'évaluation, des examens de mi-parcours ou les examens de fin d'année. Les examens compteront probablement pour la majeure partie de votre note. Si vous avez remis des travaux copiés mal compris, vous perdrez plus de points au moment des examens que vous en aurez gagnés à court terme. Mais si vous suivez bien les enseignements et remettez les travaux demandés en vous assurant de tout comprendre avant d'aller plus loin, vous réussirez fort probablement.

Si vous prenez du retard, il faudra le rattraper. Il ne faudra pas paniquer, car il est possible de le faire. Il existe diverses ressources pour vous aider.

- **Vous-même.** Si vous prenez du retard et n'étudiez pas assez - disons de cinq à six heures par semaine hors de la classe pour chaque cours, mettez-vous vite au travail et ouvrez votre manuel.
- **Votre manuel** renferme des centaines d'exemples de résolutions de problèmes et des milliers de problèmes. Habituellement, on trouve les réponses à près de la moitié des problèmes au dos du livre. Vous pourriez aussi vous procurer un guide d'études montrant en détail la façon de travailler ces problèmes. Vous pouvez aussi acheter d'autres livres comme les manuels de la série *Schaum*, qui renferme aussi des résolutions de problèmes.
- Vous pourrez durant les heures de consultation prévues aller voir l'enseignant(e) du cours pour obtenir de l'aide. Essayez de déterminer à l'avance ce qu'il peut vous aider à comprendre de façon à mieux profiter de la rencontre.
- Vous pouvez aussi discuter de votre problème avec vos camarades, ce qui n'est pas la même chose, bien entendu, que de copier leurs travaux. À l'université, des peines sévères, dont l'expulsion parfois, sont imposées aux étudiant(e)s qui plagient.
- L'Université de Sherbrooke dispose d'un **Centre d'aide en mathématiques** qui offre de la consultation en personne et en ligne. À vous d'en profiter!
- Il est possible que votre université ou votre association étudiante organise des **ateliers** sur la manière d'étudier et de prendre des notes efficacement, de faire face au stress des examens, etc. Vous pourrez aussi bénéficier de conseils pour d'autres problèmes pouvant nuire à vos études.

1.6 À L'AIDE! On veut m'enlever ma calculatrice!

Dans certains cours de calcul différentiel et intégral de première année, les calculatrices ne sont pas requises pour les tests ou les examens. Vous pouvez sans problème utiliser une calculatrice dans les cours si vous voulez ou pour les travaux à la maison.

Dans d'autres cours d'introduction au calcul différentiel et intégral, les calculatrices ou les ordinateurs sont utilisés de façon intensive pour explorer le comportement des fonctions.

- Si vous ne pouvez utiliser votre calculatrice dans votre cours de calcul différentiel et intégral, les questions seront posées de façon que vous n'en ayez pas besoin pour répondre. L'enseignant(e) ne peut raisonnablement vous demander de développer $(1.42433x + 2.4577)^3$ sans calculatrice et il ne le fera pas non plus. Il pourrait par contre vous demander de développer $(x + 2)^3$, et vous n'aurez pas besoin de calculatrice pour cela.

- Si l'utilisation de la calculatrice n'est pas permise, toute expression n'ayant pas une simplification bien connue peut toujours être laissée telle quelle. Ainsi, bien que vous devriez savoir que $\sqrt{25} = 5$ et que $\log_{10} 1000 = 3$, vous pouvez toujours laisser, par exemple, $\sqrt{17}$ ou $\ln(1000)$ telles quelles, ce qui est encore plus facile que d'utiliser une calculatrice. Notez toutefois qu'on s'attendra généralement à ce que vous simplifiiez, par exemple, $\sqrt{17}/\sqrt{17}$ en 1. L'utilisation de l'algèbre (par opposition à l'arithmétique) pour simplifier des expressions sera chose fréquente dans votre cours. Les conventions touchant ce qui doit et ne doit pas être simplifié vous seront clairement expliquées durant le cours.

- Même si vous ne pouvez utiliser une calculatrice dans votre cours de calcul différentiel et intégral, on vous demandera souvent de répondre par une expression algébrique comportant des nombres entiers. Par exemple, on pourrait vous demander ceci : " Répondez par une expression de la forme $\sqrt{b}/c$ où b et c sont des nombres entiers." Il est beaucoup plus important dans le calcul différentiel et intégral de savoir que $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ **et pourquoi** que de savoir que c'est approximativement égal à $0,707$.

Dans les cours où pour une raison précise les questions des tests impliquent de nombreux calculs, on vous autorisera - et on vous encouragera - à utiliser une calculatrice, voire même un ordinateur. Entre temps, si vous n'avez pas le droit d'utiliser une calculatrice dans les tests, vous pouvez raisonnablement être sûr(e) que les calculs seront simples.

2 Les mathématiques dont vous aurez besoin

Dans cette section, nous présentons plus de 175 questions couvrant les connaissances en mathématique minimums dont vous aurez absolument besoin pour votre cours de calcul différentiel et intégral universitaire. Des réponses à quelques-unes de ces questions sont fournies dans cette section, tandis que les autres se trouvent à la fin de la brochure.

Ce ne sont pas tous les sujets importants des mathématiques du secondaire qui sont abordés dans cette brochure, et il est même possible que nous ayons oublié de mentionner certaines des connaissances pertinentes au calcul différentiel que vous devriez avoir. Idéalement, vous seriez capable de résoudre des problèmes plus compliqués que ceux que l'on trouve dans cette brochure. Toutefois, si vous comprenez la matière abordée ici, vous serez raisonnablement bien préparé(e) pour le calcul différentiel et intégral.

2.1 Arithmétique

Vous devriez être capable de vous passer d'une calculatrice en arithmétique de base, y compris de faire des opérations impliquant des fractions, des nombres négatifs et des décimales. Vous devriez être capable de calculer des puissances et des racines simples. Apprise au primaire et au premier cycle du secondaire, cette matière est essentielle pour tout ce qui suivra. De plus, de nombreux problèmes d'arithmétique sont en réalité de "l'algèbre avec des nombres".

Exemples :

1. Déterminer $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$.

   Solution: Pour additionner (ou soustraire) des fractions, on les exprime avec un dénominateur commun. Par exemple,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

2. Représenter le nombre 1,25 sous la forme d'une fraction réduite. **Solution:** Pour représenter un nombre décimal sous la forme d'une fraction réduite, il suffit d'abord de l'écrire comme une fraction dont le dénominateur est à la puissance de 10 et ensuite de réduire cette fraction.

$$1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{5}{4}$$

   (AIDE : Il est utile de mémoriser la représentation décimale de plusieurs fractions usuelles, telles que $1/2 = 0,5$, $1/3 = 0,333\ldots$, etc.)

Problèmes : (réponses aux pages 38 et 39)

1. Déterminer $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$.
2. Déterminer $\frac{3}{4} - \frac{1}{5}$.
3. Représenter $\frac{1}{3} \times \frac{6}{5}$ sous la forme d'une fraction réduite.
4. Représenter $3,125$ sous la forme d'une fraction réduite.
5. Représenter $37/25$ sous la forme d'un nombre décimal.
6. Représenter $17/10$ sous la forme d'un nombre décimal.
7. Déterminer $0,0001 \times 0,01/0,001$
8. Déterminer $1,23 \times 0,1$
9. Déterminer $1,005 + 9,995$
10. Déterminer $1 - (-2)$
11. Déterminer $\sqrt{64}$
12. Exprimer $20^3/20^5$ sous la forme d'un nombre décimal.

2.2 Algèbre de base

Comme on l'a fait remarquer plus haut, l'algèbre de base est étroitement liée à l'arithmétique, et bon nombre de ses règles sont connues comme étant des "règles d'arithmétique". Vous devriez savoir que $a \times b$ peut s'écrire sous la forme ab.

Vous devriez connaître les règles de base relatives aux additions, aux soustractions, aux multiplications, aux divisions et aux exposants. Vous devriez savoir que des opérations comme la division par 0 ou le calcul d'une racine carrée d'un nombre négatif ne peuvent se faire dans le système des nombres réels.

Vous devriez aussi savoir comment résoudre une équation simple, simplifier une expression algébrique et évaluer une expression en y insérant des valeurs. Toutes ces connaissances seront très importantes dans votre cours de calcul différentiel et intégral.

Exemples:

1. Simplifier $\frac{a^7b^3}{a^4b^4}$.
   Solution : En effectuant des opérations de base pour les exposants, nous obtenons
$$\frac{a^7b^3}{a^4b^4} = a^{7-4}b^{3-4} = a^3b^{-1} = \frac{a^3}{b}$$

2. Résoudre l'équation $ax + 4 = 2x - a$ en x lorsque $a = 5$.
   Solution: En substituant $a = 5$ et isolant x par des opérations successives, on obtient la solution suivante :
$$\begin{aligned} 5x + 4 &= 2x - 5 \\ 5x + 4 - 2x &= 2x - 5 - 2x \\ 3x + 4 - 4 &= -5 - 4 \\ 3x\left(\frac{1}{3}\right) &= -9\left(\frac{1}{3}\right) \\ x &= -3. \end{aligned}$$

   Donc $x = -3$.

Problèmes: (réponses aux pages 38 et 39)

1. Simplifier $(a^4/a^2)^2$.
2. Simplifier $abc - acb + acd - ace$, et factoriser si possible.
3. Simplifier $\frac{\frac{y}{x}+x}{\frac{2}{x}}$.
4. Simplifier $(a^2 + a^3 + a^4)/a$, et factoriser si possible.
5. Résoudre l'équation $3x + 2 = x + 2$ en x.
6. Si $x = 5$ et $y = 7$, déterminer $x^2 - xy + 3y$.
7. Simplifier $\frac{a^2-(-a^2)}{a^2}$.
8. Si $a = 5$ et $b = 2$, déterminer $a - b^2 + 2ab$.
9. Résoudre $x^5 + 2x + 3 = x^5 - x$.
10. Si $x = 3$ et $xy = 1$, déterminer y.
11. Simplifier $(a^2/a^{-2})(b^{-2}/b^2)$.
12. Résoudre $a + x + 2 = a - x + 4$.

2.3 Inégalités et valeurs absolues (matière vue en MAT900)

Vous devriez être capable de résoudre des inégalités simples et d'effectuer des opérations algébriques avec ces inégalités. Vous devriez en particulier savoir quelles sont les opérations qui renversent les inégalités et celles qui les préservent. Vous devriez comprendre la notation des intervalles, y compris des intervalles ouverts, fermés et mi-ouverts, ainsi que les intervalles dont les limites se situent à ∞. Vous devriez savoir comment calculer une valeur absolue et faire des opérations algébriques simples au moyen de la fonction valeur absolue.

Exemples:

1. Résoudre $\frac{7-2x}{3} \leq 4$.

   Solution: De l'inégalité $\frac{7-2x}{3} \leq 4$, on obtient $7 - 2x \leq 12$ et $-2x \leq 5$. Alors, $x \geq -\frac{5}{2}$, ou autrement $x \in [-\frac{5}{2}, \infty)$.

2. Résoudre $x^2 + 3x - 10 \leq 0$.

   Solution:

   En factorisant le côté gauche de l'inéquation, on obtient $(x+5)(x-2) \leq 0$. Puisque l'équation correspondante $(x+5)(x-2) = 0$ a pour solutions -5 et 2, on peut analyser son signe séparément sur chacun des intervalles suivants de la droite réelle : $(-\infty, -5)$, $(-5, 2)$, $(2, \infty)$.

   En effet, pour chacun de ces intervalles, on détermine le signe comme suit :

Intervalle	$x+5$	$x-2$	$(x+5)(x-2)$
$(-\infty, -5)$	$-$	$-$	$+$
$(-5, 2)$	$+$	$-$	$-$
$(2, \infty)$	$+$	$+$	$+$

   Du tableau, on déduit que $x^2 + 3x - 10 \leq 0$ sur l'intervalle $x \in [-5, 2]$.

3. Résoudre $|4x + 5| > 9$.

   Solution: L'équation $|4x+5| > 9$ est équivalente à
   $4x + 5 > 9$ ou $4x + 5 < -9$
   $4x > 4$ ou $4x < -14$
   $x > 1$ ou $x < -\frac{7}{2}$,

   qui s'exprime également comme $x \in (-\infty, -\frac{7}{2}) \cup (1, \infty)$.

Problèmes: (réponses aux pages 38 et 39)

1. Si $y > x$, $x \geq w$, et $w < z$, lequel des choix suivants doit nécessairement être vrai ?

   (a) $y > w$, (b) $y < w$, (c) $y > z$, (d) $y < z$, (e) aucune de ces réponses.

2. Pour quelles valeurs de x a-t-on $(x-2)^2 \geq 0$?

3. Si $a > b$, peut-on déduire que :

   (a) $a^2 > b^2$ toujours ; (b) $a^2 > b$ toujours ; (c) $a^2 > b^2$ si $b > 0$;
   (d) $a^2 \geq b^2$ toujours ; (e) aucune de ces réponses.

4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $1/(1+x) > -1$?

5. Pour quelles valeurs de y a-t-on $y^2 > 0$?

6. Pour quelles valeurs de y a-t-on $y^2 \geq 2$?

7. Pour quelles valeurs de x a-t-on $|x-3| \leq 1$?

8. Lequel des intervalles suivants contient le point 0 ?
   (a)$(-\infty, 0)$ (b)$(-1, 1)$ (c)$(0, \infty)$
   (d) chacune des réponses a,b et c (e) a et c seulement

9. Lequel des intervalles suivants contient le point 0 ?
   (a)$(-\infty, 0]$ (b)$[-1, 1]$ (c)$[0, \infty)$
   (d) chacune des réponses a,b et c (e) a et c seulement

10. Évaluer $|3 - |3-6||$.

11. Simplifier $x^2 - 2|x^2|$.

12. Résoudre $-1 < 2x - 5 < 7$.

13. Résoudre $x^2 - 3x + 2 > 0$.

14. Résoudre $|2x-3| \leq 5$.

15. Résoudre l'équation $\frac{|x+3|}{|2x+1|} = 1$.

2.4 Fonctions (matière vue en MAT900)

Vous devriez comprendre le concept de “fonction” et de “fonction inverse” et savoir comment calculer la composition de deux fonctions ou plus. Vous devriez être capable de déterminer le codomaine et le domaine d’une fonction simple. Ces connaissances seront importantes pour comprendre la règle d’enchaînement pour la dérivée d’une composition de fonctions, diverses méthodes d’intégration et les limites.

Exemples:

1. Déterminer les domaines des fonctions :
   (a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ (b) $g(x) = \sqrt{4-x}$

   Solution

   (a) Le domaine de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ est l’ensemble des valeurs x telles que $x^2 - 1 \neq 0$, c’est-à-dire $x \neq \pm 1$, ou $x \in \{(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)\}$.

   (b) Le domaine de la fonction $g(x) = \sqrt{4-x}$ est l’ensemble des valeurs x telles que $4 - x \geq 0$, c’est-à-dire $x \leq 4$, ou $x \in (-\infty, 4]$.

2. Si $f(x) = 3x + 5$, déterminer $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

   Solution

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{[3(x+h)+5]-[3x+5]}{h} = \frac{3x+3h+5-3x-5}{h} \\ &= \frac{3h}{h} = 3 \end{aligned}$$

3. Si $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = x^2$, déterminer :
   (a) $f(g(x))$ (b) $g(f(x))$

   Solution

   (a) $f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2-1}$, cette fonction ayant pour domaine $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

   (b) $g(f(x) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2$
   Cette fonction prend les valeurs $x - 1$ dans le domaine $[1, \infty)$, mais n’est pas définie ailleurs.

Problèmes: (réponses aux pages 38 et 39)

1. Déterminer le plus grand domaine (parmi les nombres réels) pour lequel la fonction $f(x) = 1/x$ peut être définie.
2. Déterminer le domaine de la fonction $f(x) = 1/(x+1)$.
3. Si $g(x) = x^2 + 2$, trouver $g(1+x)$.
4. Déterminer le codomaine de la fonction $f(x) = x^2$.
5. Déterminer les domaine et codomaine de la fonction f(x) = $\frac{|x|}{x}$.
6. Si $f(x) = \frac{1}{x+1}$, déterminer (a) $f(x^2)$; (b) $f(-2)$; (c)$f(\sqrt{x})$.
7. Si $f(x) = 1/x$ et $g(x) = x^2$, déterminer $f(g(a))$.
8. Si $f(x) = 1/x$ et $g(x) = x^2$, déterminer $g(f(2))$.
9. Si $f(x) = 1/(x+1)$, déterminer $f(f(x))$
10. Déterminer la fonction inverse de $f(x) = x^{-3}$.
11. Lesquelles des fonctions suivantes sont leur propre inverse ?
    (a) $f(x) = x^2$, (b) $g(x) = -x$, (c) $h(x) = x$
    (d) chacune des fonctions f,g et h (e) g et h seulement
12. Lesquelles des fonctions suivantes possèdent une fonction inverse ?
    (a) $f(x) = x^3$, (b) $g(x) = x^5$, (c) $h(x) = x$
    (d) chacune des fonctions f,g et h (e) g et h seulement
13. Déterminer la fonction inverse de la fonction $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$.

2.5 Polynômes

Vous devriez savoir comment additionner, soustraire, multiplier et diviser des polynômes et les décomposer en facteurs. Vous devriez connaître des formes d'expression spéciales comme la différence entre deux puissances. Vous devriez comprendre le lien qui existe entre les racines et la décomposition en facteurs et être capable de résoudre une équation quadratique. Vous devriez être capable de travailler avec une fonction polynomiale plus générale, par exemple réduire $\sin(x)^2 + 2\sin(x) + 1$.

Exemples:

1. Développer : $(x^2 - 1)(x^2 + 3)$

Solution :
$$\begin{aligned}(x^2-1)(x^2+3) &= x^2(x^2+3) - 1(x^2+3)\\ &= x^2 \times x^2 + x^2 \times 3 - 1 \times x^2 - 1 \times 3\\ &= x^4 + 3x^2 - x^2 - 3\\ &= x^4 + 2x^2 - 3\end{aligned}$$

2. Développer : $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

Solution :
$$\begin{aligned}(x-1)(x+1)(x^2+1) &= (x-1)(x+1)\ \ (x^2+1)\\ &= (x(x+1) - 1(x+1))\ \ (x^2+1)\\ &= (x^2 + x - x - 1)(x^2+1)\\ &= (x^2-1)(x^2+1)\\ &= x^2(x^2+1) - 1(x^2+1)\\ &= x^4 + x^2 - x^2 - 1\\ &= x^4 - 1\end{aligned}$$

3. Résoudre : $y^2 - 7y + 12 = 0$

Solution : Pour résoudre ce problème, on peut soit factoriser le polynôme, soit utiliser la formule donnant les racines d'un polynôme de degré 2. On observe par factorisation que

$$\begin{aligned}y^2 - 7y + 12 &= 0 \qquad \text{devient}\\ (y-4)(y-3) &= 0\end{aligned}$$

ce qui implique que les racines sont $y = 3$ et $y = 4$.

Problèmes: (réponses aux pages 38 et 39)

1. Résoudre : $x^2 - 5x + 3 = 0$.
2. Factoriser $2x^2 + 5x + 2$.
3. Compléter le carré du polynôme $x^2 + 2x + 2$, et puis tracer son graphe.
4. Simplifier : $(x^2 + 3)(x^2 + a) - x^4$.
5. Si on divise $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x + 1$, quel est le reste ?
6. Développer : $(x + 2)^4$.
7. Développer et simplifier : $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{x}$
8. Développer et simplifier : $\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x}$
9. Développer : $(x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$
10. L'équation $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ possède combien de solutions réelles ?
11. Factoriser : $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

2.6 L'algèbre des fractions

Vous devriez être capable de simplifier une expression fractionnaire, de transformer une expression fractionnaire complexe en une expression simple, de mettre des expressions fractionnaires sur un dénominateur commun et d'effectuer un développement en fractions partielles. Ces connaissances seront utiles pour trouver diverses dérivées, simplifier des dérivées et des intégrales et en particulier pour la technique d'intégration par les "fractions partielles".

Exemples :

1. Simplifier $\frac{(x-1)^2+4x}{x+1}$.

   Solution : $\frac{(x-1)^2+4x}{x+1} = \frac{x^2-2x+1+4x}{x+1} = \frac{x^2+2x+1}{x+1} = x+1.$

2. Simplifier $\frac{\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1}}{x}$.

   Solution : $\frac{\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1}}{x} = \frac{\frac{(x-1)(x+1) - (x-2)(x+2)}{(x+1)(x+2)}}{x} = \frac{(x^2-1)-(x^2-4)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{3}{x(x+1)(x+2)}.$

3. Exprimer $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ en fractions partielles.

   Solution : $\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{(x+1)(x-1)}.$

   Nous cherchons à écrire ceci sous la forme $1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$. En exprimant ces fractions avec un dénominateur commun, on obtient $A(x-1) + B(x+1) = 0x + 2$; donc $A = -1$, $B = 1$, et

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \ .$$

.

Problèmes : (réponses aux pages 38 et 39)

1. Simplifier $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$.
2. Exprimer $x + 1 + 1/x + 1/x^2$ sous forme d'un rapport $P(x)/Q(x)$ de deux polynômes.
3. Simplifier $\frac{x+1}{x+3} - \frac{x}{x+2}$. Existe-t-il une valeur de x pour laquelle cette expression vaut 0 ?
4. Simplifier $\frac{1/x}{1/x^2}$.
5. Simplifier $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+h}}{h}$.
6. Résoudre l'équation $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x}{x-1} = 0$.
7. Simplifier $\frac{1/x + 1/y}{1/x - 1/y}$.
8. Simplifier $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)}$.
9. Exprimer $\frac{1}{x^2+x-6}$ en fractions partielles.
10. Exprimer $\frac{x^3+4x^2+4x+1}{x^2+2x}$ en fractions partielles.
11. Exprimer $\frac{1}{x^3-x}$ en fractions partielles.

2.7 Rationalisation des numérateurs ou des dénominateurs

Vous devriez savoir comment supprimer les racines carrées (et autres) du numérateur ou du dénominateur d'une fraction en multipliant le numérateur et le dénominateur par une expression appropriée. Cette technique sera importante pour trouver les dérivées de certaines expressions impliquant des racines.

Exemples :

1. Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{a}}$
   Solution : Il s'agit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}$ afin d'obtenir :
   $$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

2. Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$
   Solution : Rappelons d'abord qu'un produit du type $(a+b)(a-b)$ donne la différence des carrés $a^2 - b^2$. Alors, si le dénominateur d'une expression rationnelle est la somme d'une constante et d'un multiple de $\sqrt{x}$, nous serions en mesure de faire disparaître la racine carrée en multipliant par la différence entre la constante et ce même multiple de $\sqrt{x}$. En l'occurrence, il s'agit ici de multiplier le numérateur et le dénominateur par $2 - \sqrt{x}$ pour obtenir le résultat voulu.
   $$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} &= \frac{(1+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})}\,\frac{(2-\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})} \\ &= \frac{2-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-x}{4-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}-x} \\ &= \frac{2+\sqrt{x}-x}{4-x} \end{aligned}$$

3. Rendre rationnel le numérateur de $\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$
   Solution : Cette fois-ci, nous multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué du numérateur :
   $$\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = \frac{(1+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})}\,\frac{(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})} = \frac{1-x}{2-\sqrt{x}-x}$$

Problèmes : (réponses aux pages 38 et 39)

1. Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$.
2. Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{a}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}}$.
3. Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.
4. Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{a-\sqrt{x}}{b-\sqrt{x}}$.
5. Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{1}{1+x^{1/3}+x^{2/3}}$.
6. Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x}$.
7. Rendre rationnel le dénominateur de $\frac{a-\sqrt{x}}{b-\sqrt{x}}$.
8. Rendre rationnel le numérateur de $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x}$.
9. Rendre rationnel le numérateur de $\frac{\sqrt[3]{y+h}-\sqrt[3]{y}}{h}$.

2.8 Graphes de fonctions linéaires

Vous devriez être capable de tracer le graphe des fonctions et des inégalités linéaires, de déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine d'une droite à partir de son équation et vice versa, de déterminer le point d'intersection de deux lignes, d'utiliser la relation entre les pentes de deux droites orthogonales et de trouver la distance entre deux points.

Un grand nombre de ces notions seront conceptuellement importantes dans le calcul différentiel et intégral, qui porte souvent sur les pentes, les tangentes, les sécantes, etc.

Exemples :

1. Déterminer le point d'intersection des droites $x = 2$ et $x + y = 5$.

   Solution : Il n'est pas nécessaire de tracer un graphe ici. En effet, rappelons d'abord que la droite (ou courbe) correspondant à une équation est composée de l'ensemble des points (x, y) pour lesquels l'équation est vérifiée; par conséquence, l'intersection de deux droites ou courbes est l'ensemble des couples (x, y) qui permettent de vérifier chaque équation.

   Donc nous cherchons un point (x, y) tel que $x = 2$ et $x+y = 5$. En substituant la valeur de x donnée par la première équation dans la seconde, nous obtenons $2 + y = 5$, $y = 3$, soit la réponse $(x, y) = (2, 3)$.

2. Déterminer la pente de la droite passant par les points $(-5, 0)$ et $(3, 2)$.

   Solution : Le "déplacement vertical" est de $2-0 = 2$, tandis que le "déplacement horizontal" est de $3 - (-5) = 8$.
   Donc la pente est égale au rapport $= 2/8 = 1/4$.

3. Déterminer l'équation de la droite orthogonale à $x + 2y = 3$ et passant par le point $(5, 0)$.

   Solution : D'abord, trouvons la pente de la droite $x + 2y = 3$. Pour trouver cette pente, on peut isoler y dans l'équation, ce qui donne $2y = 3-x$ et ensuite $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$. Donc la pente de la droite $x + 2y = 3$ est égale à $m = -\frac{1}{2}$.

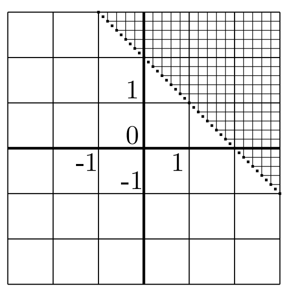
   Puisque la droite en question est orthogonale à la droite $x + 2y = 3$, sa pente doit correspondre à l'inverse multiplicatif de l'inverse additif de la pente de la premiére droite, c'est-à-dire $-1/(-\frac{1}{2}) = 2$. Donc la pente de la droite recherchée vaut 2, et cette droite a pour équation $y = 2x + b$.

   Enfin, puisque chaque point de notre droite doit satisfaire cette dernière équation, on a $0 = 2 \times 5 + b$, ce qui donne $b = -10$, et

   $$y = 2x - 10 \; .$$

Problèmes : (réponses aux pages 38 et 39)

1. Déterminer la pente de la droite $2y = x - 2$
2. Obtenir l'équation de la droite de pente 3, et passant par le point $(0, 0)$.
3. Si une droite a une pente de $3/2$ et passe par le point $(2, 2)$, déduire son équation.
4. Déterminer la distance entre les points $(0, 3)$ et $(3, 0)$.
5. Déterminer la pente de la droite passant par les points $(0, 3)$ et $(3, 0)$.
6. Déterminer le point d'intersection des droites $y = 5 - x$ et $y = 2x + 2$.
7. Déterminer l'équation de la droite de pente $-1/2$ et d'ordonnée à l'origine 3.
8. Déterminer la pente de la droite orthogonale à la droite $y = 3x + 5$.
9. Déterminer l'équation de la droite passant par les points $(3, 2)$ et $(1, 0)$.
10. Laquelle des inégalités suivantes est représentée par le graphe ci-dessous ?



(a) $y > 2$ (b) $x > y + 2$ (c) $x < y + 2$ (d) $x > 2$ (e) $x + y > 2$

11. Laquelle des droites suivantes est parallèle à $2y = 6x - 1$?

(a) $2y = 5x - 1$ (b) $y = 6x + 1$ (c) $y = 3x + 1$
(a) $2y = 3x + 2$ (a) $2y = -6x + 1$

12. Laquelle des droites suivantes est orthogonale à $y = 3x - 1$?

(a) $y = -3x - 1$ (b) $y = -x/3 + 1$ (c) $y = x/3 + 1$
(d) $3x = y + 2$ (e) $y = 1 - 3x$

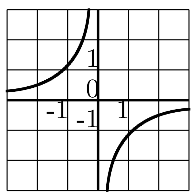
2.9 Graphiques

Vous devriez être capable de tracer le graphe de polynômes et des fonctions rationnelles tout en montrant des caractéristiques comme les zéros, les ordonnées à l'origine, les asymptotes horizontales, verticales et inclinées ainsi que les points de discontinuité. Vous devriez aussi être capable de repérer des caractéristiques importantes d'un graphique.

Un graphique - en ce qui nous concerne - doit être tracé en déterminant les principales caractéristiques et en les faisant se rejoindre par des courbes continues. Il ne s'agit pas de dessiner cinq ou six points et de les relier par des lignes droites. Dans votre cours de calcul différentiel et intégral, vous apprendrez à améliorer vos compétences en matière de graphisme en y ajoutant d'autres caractéristiques comme les maxima, minima et points d'inflexion.

Exemples :

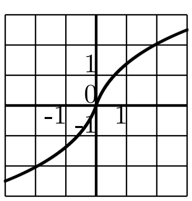
1. Laquelle des équations suivantes représente le mieux le graphe ci-dessous ?

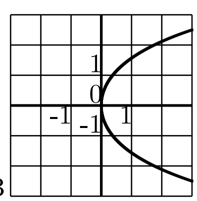


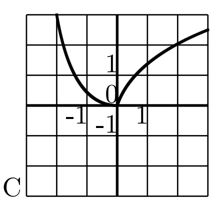
(a) $y = x^2$
(b) $y = 1/x$
(c) $y = \sin(x)$
(d) $x = -1/y$
(e) $x = y^2$

Solution : On peut éliminer d'emblée les choix (a), (c) et (e), puisque le graphe possède une asymptote verticale (il s'agit de la droite $x = 0$). Parmi les deux choix qui demeurent, remarquer que le graphe correspondant à l'équation (b) se situe aux premier et troisième quadrants (c'est-à-dire que x et y sont du même signe), tandis que l'équation (d) est vérifiée par les points de la courbe, dont le point $(1, -1)$. Le seul choix possible est donc l'équation (d), et, effectivement, ces propriétés sont présentes dans le graphe.

2. Lequel des graphes suivants est celui d'une fonction $y = f(x)$?

A 

B 

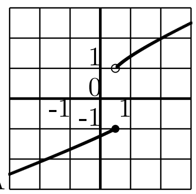
C 

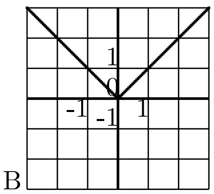
(a) A seulement
(b) B seulement
(c) C seulement
(d) A, B et C
(e) A et B
(f) A et C

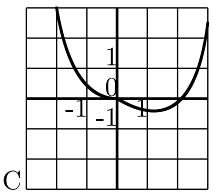
Solution : La réponse est (f). Le graphe B n'a pas, pour chaque x, une valeur unique correspondante y. À l'opposé, les graphes A et C possèdent cette propriété. L'apparence continue du graphe B ou sa ressemblance avec une parabole n'importe pas. (Il s'agit plutôt d'un graphe d'une équation de la forme $x = f(y)$.)

Problèmes: (réponses aux pages 38 et 39)

1. Lequel des graphes suivants est celui d'une fonction $y = f(x)$?

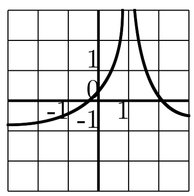
A 

B 

C 

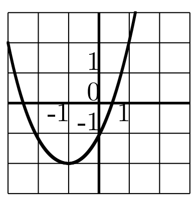
(a) A seulement
(b) B seulement
(c) C seulement
(d) A, B et C
(e) B et C
(f) A et C

2. Laquelle des équations suivantes représente le mieux la courbe ci-dessous ?



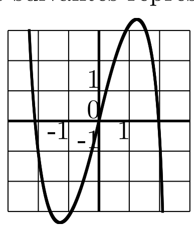
(a) $y = 1/(x-1)^2 - 1$
(b) $y = 1 - 1/x$
(c) $y = 1/(x+1)^2 - 1$
(d) $y = 1/x^2$
(e) $y = 1/(x+1)^2 + 1$

3. Laquelle des équations suivantes représente le mieux la courbe ci-dessous ?



(a) $y = x^2 - 2$
(b) $y = (x+1)^2$
(c) $y = x^2 + 2x - 1$
(d) $y = x^2 - 2x - 1$
(e) $y = x^2 + 2x - 2$

4. Laquelle des équations suivantes représente le mieux la courbe ci-dessous ?



(a) $y = x^3$
(b) $y = -x^3$
(c) $y = x^3 + 4x$
(d) $y = x^3 - 4x$
(e) $y = 4x - x^3$

2.10 Exposants et racines

Vous devriez connaître les identités de base des exposants et des racines et être capable de les utiliser pour résoudre des équations et établir d'autres identités. En particulier, vous devriez être capable de transformer une expression comme $\frac{1}{x^n}$ en une puissance négative ou une racine en une puissance fractionnaire. Ces identités seront extrêmement importantes en calcul différentiel et intégral, parce qu'elles permettent d'utiliser une seule règle pour dériver et intégrer de nombreuses expressions apparemment différentes. Par exemple, nous utilisons la même règle pour dériver x^n, $\sqrt[k]{x}$, et $1/x$.

Exemples:

1. Évaluer $4^{18}/4^{16}$.

   Solution : $4^{18}/4^{16} = 4^{18-16} = 4^2 = 16$.

2. Simplifier $\sqrt{a^{7/2}a^{5/2}a^{3/2}a^{1/2}}$.

   Solution : D'abord, on simplifie l'expression sous le radical :

   $$a^{7/2}a^{5/2}a^{3/2}a^{1/2} = a^{7/2+5/2+3/2+1/2} = a^8 .$$

   Ainsi,

   $$\sqrt{a^{7/2}a^{5/2}a^{3/2}a^{1/2}} = \sqrt{a^8} = a^4 .$$

3. Résoudre l'équation : $x^{-2} = 100$.

   Solution : En posant l'égalité des inverses multiplicatifs de chaque côté de l'équation, nous obtenons $x^2 = 1/100$. Ensuite, on prend les racines carrées pour obtenir $x = 1/10$, (ou $x = 0,1$).

4. Déterminer a^{-2} si $a^4 = 9$.

   Solution : Si $a^4 = 9$, $a^2 = 3$, et $a^{-2} = 1/3$.

Problèmes: (réponses aux pages 38 et 39)

1. Simplifier l'expression $\frac{\sqrt{x} \times x^2}{1/x^2}$.
2. Quelle est la valeur de b si $a^{3/2} a^{-2} \sqrt[3]{a} = a^b$?
3. Résoudre l'équation : $4^x 2^x = 64$.
4. Résoudre l'équation : $4^0 + 2^x = 9$.
5. Évaluer $\left(\frac{1}{\sqrt{16}}\right)^{1/2}$.
6. Étant donné que $a^4 = b^8$, pour des nombres réels a, b, lequel des énoncés doit être vrai ?
   (a) $a = b^2$ (b) $a = -b^2$ (c) $a = b^{-2}$
   (d) $a = b^2$ ou $a = -b^2$ (e) aucune de ces réponses.
7. $\sqrt{a^{16} b^{16}} =$ (a) $(ab)^2$ (b) $(ab)^4$ (c) $(ab)^8$ (d) $(ab)^{16}$
   (e) aucune de ces réponses.
8. Si $a^b = (\sqrt[3]{a})^{12}$, que vaut b ?
9. Déterminer a, si $a^3 = b$ et $b^{1/6} = 10$.
10. Si $\sqrt[b]{a} = a^2$, que vaut b ?

2.11 Logarithmes (matière vue en MAT900)

Les logarithmes sont extrêmement importants dans bien des sciences et il importe donc d'être capable de dériver et d'intégrer les expressions en comprenant. À cette fin, vous devez être capable de manipuler les logarithmes algébriquement. Vous devriez connaître la définition des logarithmes pour diverses bases, leur relation avec les puissances et les racines et la loi des changements de base $\log_a(b)\log_b(c) = \log_a(c)$. Bien que les logarithmes semblent compliqués au départ, en fait, il n'y a pas beaucoup de choses à apprendre à leur sujet.

Exemples:

1. Déterminer $\log_5(125)$.
   Solution : Puisqu'on reconnaît 125 comme étant le cube de 5, (ou on y arrive assez rapidement par essais et erreurs), on a $5^3 = 125$, et alors $\log_5(125) = 3$.

2. Simplifier $\log_2(3)\log_3(4)$
   Solution : En utilisant la loi des changements de base, on a $\log_2(3)\log_3(4) = \log_2(4)$; puisque $4 = 2^2$, la réponse est $\log_2(4) = 2$.

3. Quel est le logarithme en base 10 de $10\sqrt{10}$?
   Solution : Étant donné que $10\sqrt{10} = 10^{3/2}$, on a $\log_{10}(10\sqrt{10}) = 3/2$.

4. Déterminer $\log_b(a^2)$ si $\log_a(b^2) = 3$.
   Solution : Puisque $\log_a(b^2) = 3$, on en déduit que $\log_a(b) = 3/2$. En vertu de la loi des changements de base, on a $\log_b(a) = 2/3$, et ainsi $\log_b(a^2) = 4/3$.

5. (Sans notes et sans calculatrice!) Le logarithme naturel de 10 est compris entre :
   (a) 0 et 1 (b) 1 et 2 (c) 2 et 4 (d) 4 et 6 (e) 6 et 10
   Solution : Évidemment, si on savait que $\ln(10) = 2.3025\ldots$, on n'aurait pas besoin de se creuser la tête! Mais, il suffit de savoir que la base du logarithme naturel e est comprise entre 2 et 3 pour éliminer les choix (a) et (b) qui sont trop petits (puisque $e^2 < 3^2 < 10$), ainsi que les choix (d) et (e) qui sont trop grands (puisque $e^4 > 2^4 > 10$). La réponse doit donc être (c).

   (La valeur de e est $2.71828\ldots$)

Problèmes : (réponses aux pages 38 et 39)

1. Déterminer $\log_{10}(0,001)$.
2. Déterminer $\log_2(64) + \log_3(9)$
3. Lequel des énoncés suivants est vrai si $3^x = 7$?
   (a) $7 = \log_x(3)$ (b) $x = \log_7(3)$ (c) $3 = \log_x(7)$ (d) $7 = \log_3(x)$
   (e) $x = \log_3(7)$ (f) $3 = \log_7(x)$
4. $\log_3(5)\log_5(7)\log_7(9) =$
   (a)1 (b)2 (c)3 (d)4 (e) aucune de ces réponses
5. Quelle est la valeur de a si $\log_a(25) = 4$?
   (a)1/5 (b)$\sqrt{5}$ (c)5 (d)$\log_2(5)$ (e) aucune de ces réponses
6. Déterminer $\log_{100}(1000000)$.
7. Déterminer $\log_{100}(10)$.
8. Si $\log_{10}(2) \approx 0,301$, lequel des nombres suivants est le plus proche de $\log_{10}(2000)$?
   (a) 0.6 (b) 3 (c) 6 (d) 30 (e) 60 (f)300
9. Si $\log_{10}(2) \approx 0,301$, lequel des nombres suivants est le plus proche de $\log_{10}(8)$?
   (a) 0.3 (b) 0.6 (c) 0.9 (d) 1.2 (e) 2.4 (f)6
10. Si $\log_{10}(2) \approx 0,301$, lequel des nombres suivants est le plus proche de $\log_2(10)$?
    (a) 0.5 (b) 1 (c) 3 (d) 5 (e) 20 (f)50
11. Déterminer $2^{\log_2(17)}$.
12. Déterminer $4^{\log_2(3)}$.
13. Que vaut $\log_9(10) =$ si $\log_3(10) = K$?
    (a)$2K$ (b)$K/3$ (c)$K/2$ (d)K^2 (e)$3K$ (f)$\sqrt{K}$

2.12 Géométrie et trigonométrie de base (matière vue en MAT900)

Le calcul différentiel et intégral n'utilise pas la géométrie très avancée, mais vous devriez bien connaître les triangles similaires, le théorème de Pythagore et les droites parallèles. En ce qui concerne la géométrie analytique, vous devriez bien connaître les formules du point milieu et de distance. La trigonométrie est importante dans diverses branches des sciences, mais particulièrement en mathématiques, en physique et en génie.

Vous devriez être capable de transformer des degrés en radians et vice versa ($180° = \pi$ radians). Vous devriez connaître la définition des fonctions de la trigonométrie et être capable de les utiliser pour trouver les côtés et les angles des triangles. Vous devriez connaître et être capable d'utiliser les lois relatives aux sinus et aux cosinus en ce qui a trait aux triangles.

La plupart des angles n'ont pas de fonctions trigonométriques faciles à donner en expressions exactes plutôt qu'en approximations décimales (et on ne vous demandera pas de le faire), mais vous devriez connaître les fonctions trigonométriques de quelques angles communs comme $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ et $90°$. Vous devriez aussi savoir comment exprimer les fonctions trigonométriques des angles hors de l'intervalle $[0°, 90°]$ en termes de fonctions trigonométriques d'angles à l'intérieur de celui-ci.

Vous devriez aussi bien connaître les fonctions trigonométriques inverses. Notez que même si (par exemple) $\sin^2(x)$ signifie $(\sin(x))^2$ et $\sin(x)^{-1}$ signifie $1/\sin(x)$, ce qui est $\csc(x)$, la notation $\sin^{-1}(x)$ signifie $\arcsin(x)$.

Exemples :

1. Si la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est de 10, et si la longueur d'un des côtés est de 8, quelle est la longueur de l'autre côté ?
   Solution : Supposons que x est la longueur inconnue. Selon le théorème de Pythagore, on a $x^2 + 8^2 = 10^2$, qui implique $x^2 = 100 - 64 = 36$ et $x = 6$.

2. Déterminer les coordonnées du point milieu du segment reliant les points $(2, 3)$ et $(8, -3)$.
   Solution : Les coordonnées du point milieu sont obtenues par la formule : $\left(\frac{2+8}{2}, \frac{3+-3}{2}\right)$, ce qui donne $(5, 0)$.

3. Si les longueurs de deux côtés d'un triangle sont de 1 et 2, et si l'angle séparant ces angles mesure $45°$, quelle est la longueur x du troisième côté ?
   Solution : Selon la loi du cosinus, $x^2 = 1^2 + 2^2 - 2(1)(2)\cos(45°) = 5 - 4(\sqrt{2}/2) = 5 - 2\sqrt{2}$. Alors, on obtient $x = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$.
   (Nous exprimons la réponse de cette façon, puisqu'on ne peut pas la simplifier davantage).

Problèmes : (réponses aux pages 38 et 39)

1. Combien mesure en degrés l'angle le plus grand d'un triangle dont les longueurs des côtés sont de 15, 20 et 25 unités ?

2. Quelle est la longueur de la diagonale d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 15 unités ?

   (a) 25 (b)$\sqrt{25}$ (c)$\sqrt{125}$ (d)$\sqrt{225}$ (e)$\sqrt{325}$

3. Lequel des triplets suivants *ne pourrait pas* correspondre aux longueurs des côtés d'un triangle rectangle ?

   (a)$(3, 4, 5)$ (b)$(12, 16, 20)$ (c)$(2, 2, 3)$ (d) $(12, 13, 5)$ (e) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$

4. Quelles sont les coordonnées cartésiennes du point milieu du segment reliant les points $(10, 6)$ et $(4, 10)$?

   (a) $(2, 3)$ (b) $(3, 2)$ (c) $(5, 5)$ (d) $(7, 8)$ (e) aucune des ces réponses.

5. Quelle est la distance entre les points $(-2, 3)$ et $(1, -1)$?

   (a) 5 (b) 7 (c) 9/2 (d) $\sqrt{7}$ (e) $\sqrt{5}$

6. Déterminer le cosinus de 225°.

7. Déterminer arctan (1), en degrés.

8. Déterminer la cotangente de 30°.

9. Combien de radians font 75° ?

10. Combien de degrés font 3/2 radians ? (a)$2\pi/3$ (b)180 (c)$270/\pi$ (d)$\pi/120$ (e)$3\pi/2$

11. Pour combien d'angles θ entre 0° et 360° a-t-on $\sin(\theta) = 1/2$?

    (a)0 (b)1 (c)2 (d)3 (e)4

12. Déterminer $\tan(\pi/6)$.

13. Quelle est la valeur de arcsin(0.5) ?
    (a) 0° (b) 30° (c) 45° (d) 60° (e) 90°

14. Si l'on a $\cos(\theta) = 3/5$, alors $\sin(\theta)$ peut être égal à :

    (a) 4/5 seulement (b)5/4 seulement (c) 5/4 ou $-5/4$
    (d) 4/5 ou $-4/5$ (e) $-5/4$ seulement

2.13 Identités trigonométriques (matière vue en MAT900)

Il existe de nombreuses identités qui sont vérifiées par les fonctions trigonométriques. Elles sont importantes dans le calcul différentiel et intégral, parce qu'on les utilise pour réduire le nombre de règles à apprendre. Notez que $\cos^2(\alpha)$ signifie $(\cos(\alpha))^2$.

Un bon nombre d'identités relatives à un angle peuvent toutes être établies à partir des définitions des six fonctions par l'intermédiaire des relations $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$, $\cot(\alpha) = \cos(\alpha)/\sin(\alpha)$, $\sec(\alpha) = 1/\cos(\alpha)$ $\csc(\alpha) = 1/\sin(\alpha)$ et l'identité $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Il existe aussi diverses identités pour les fonctions trigonométriques d'une somme ou d'une différence d'angles et pour les angles doubles et les demi-angles. Ces identités sont aussi utiles dans le calcul différentiel et intégral.

Exemples :

1. $\sin^2(\theta)\sec(\theta)\csc(\theta) =$
   (a) $\sin(\theta)$ (b) $\cos(\theta)$ (c) $\tan(\theta)$ (d) $\sec(\theta)$ (e) $\csc(\theta)$ (f) $\cot(\theta)$
   Solution : La réponse est (c) puisque
   $$\begin{aligned} \sin^2(\theta)\sec(\theta)\csc(\theta) &= (\sin(\theta)\sec(\theta))\,(\sin(\theta)\csc(\theta)) \\ &= (\sin(\theta)(1/\cos(\theta)))\,(\sin(\theta)(1/\sin(\theta))) \\ &= (\tan(\theta)). \end{aligned}$$

2. Déterminer β si $\sin(35°) = \cos(\beta)$ et $\beta \in [0°, 90°]$.
   Solution : Puisque $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$ pour tout α, nous avons $\beta = 55°$.

3. Déterminer $\cos(2\alpha)$ si $\cos(\alpha) = 0,3$.
   Solution : En appliquant la loi relative au cosinus du double d'un angle,
   $$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1,$$
   nous obtenons $\cos(2\alpha) = 2(0,3^2) - 1 = -0,82$. Remarquer qu'il n'est pas nécessaire de connaître α explicitement!

Problèmes : (réponses aux pages 38 et 39)

1. $\sin(2x) =$
   (a) $2\sin(x)$ (b) $\sin(x)+\cos(x)$ (c) $\cos(x)\sin(x)$
   (d) $2\cos(x)-2\sin(x)$ (e) $2\cos(x)\sin(x)$
2. $\cot(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\alpha) =$
   (a) $\cos(\alpha)\sin(\alpha)$ (b) $\sin^2(\alpha)$ (c) $\cos^2(\alpha)$ (d) $\cos(\alpha)$ (e) $\sin(\alpha)$
3. $\tan(\alpha)\cot(\alpha) =$
   (a) $\sin(\alpha)$ (b)$\cos(\alpha)$ (c) $\sin^2(\alpha)$ (d)$\cos^2(\alpha)$ (e) 1
4. Quelle est la valeur de $\tan(\theta)$ si $\cos(\theta) = \sqrt{(}2)/2$?
   (a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) 1/2 (e) ± 1
5. Quelle est la valeur de $\cot(\theta)$ si $\tan(\theta) = 3$?
   (a) 3 (b) 1/3 (c) 0 (d) -3 (e) $-1/3$
6. Si $\sin(\gamma) = 1/3$, que vaut $\sin(-\gamma)$?
   (a) 2/3 (b) 1/3 (c) $-1/3$ (d) $-2/3$ (e) aucune de ces réponses
7. Si $\cos(\gamma) = 1/3$, que vaut $\cos(-\gamma)$?
   (a) 2/3 (b) 1/3 (c) $-1/3$ (d) $-2/3$ (e) aucune de ces réponses
8. Déterminer $\cos(2\alpha)$ si $\cos(\alpha) = 3/5$.
9. Pour combien d'angles θ entre 0° et 360° a-t-on $\sin(\theta) = \cos(\theta)$?

   (a)0 (b)1 (c)2 (d)3 (e)4
10. Pour combien d'angles θ entre 0° et 360° a-t-on $\sin(\theta) = \sec(\theta)$?

    (a)0 (b)1 (c)2 (d)3 (e)4

2.14 Résolution de problèmes (section optionnelle)

La résolution de problèmes issus de contextes pratiques à l'aide du calcul différentiel et intégral fait fréquemment appel aux mêmes compétences que la résolution de problèmes pratiques à l'aide de l'algèbre. Dans chaque cas, il faut prendre les quantités numériques importantes - connues ou inconnues - du problème et déterminer la relation qui existe entre elles. On établit ainsi une série d'équations qui doivent être résolues pour obtenir la quantité recherchée. On peut aussi devoir connaître certaines quantités et relations qui ne sont pas fournies dans le problème.

N'essayez pas d'apprendre une formule pour chaque type de problème. On commet souvent l'erreur de penser qu'il existe une formule pour tel type de problème et une autre pour un autre type de problème. Il existe toutes sortes de problèmes différents. Apprenez plutôt les relations de base et les heuristiques.

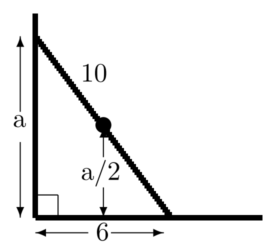
Exemples :

1. Le robinet d'un réservoir de 100 litres le remplit en 2 heures, lorsque le drain est fermé. Lorsque le drain est ouvert et le robinet fermé, le réservoir se vide à un rythme constant, et ceci, en 3 heures pour un réservoir plein. Si, à midi, le réservoir est à moitié plein, à quelle heure sera-t-il rempli (le robinet et le drain étant ouverts)?

   Solution : On doit tenir compte des vitesses auxquelles le réservoir se remplit et se vide. Le robinet remplit le réservoir à une vitesse de 100/2 litres par heure (ℓ/h), tandis que le drain le vide à une vitesse de 100/3 litres par heure. Puisqu'on cherche à ajouter 50 litres au réservoir, la durée nécessaire est de $50\ell/(100/6\ \ell/\text{h}) = 3$ h. Alors, le réservoir sera plein à 15 h.

2. Une échelle de 10 mètres est posée sur un mur. Si le pied de l'échelle est à 6 mètres du mur, à quelle hauteur se trouve le point milieu de l'échelle?

   Solution : **Nous traçons un diagramme que voici.** Puisque le mur est vertical, un angle droit sépare le mur et le sol si nous supposons que le sol est horizontal. En conséquence, l'échelle, le mur et le sol forment un triangle rectangle (l'échelle jouant le rôle de l'hypoténuse). Le théorème de Pythagore nous fournit l'équation $a^2 + 6^2 = 10^2$, d'où $a = \sqrt{(100-36)} = 8$. Donc le point milieu de l'échelle se situe à $a/2 = 4$ mètres du sol.



Problèmes : (réponses aux pages 38 et 39)

1. Déterminer la longueur de la base d'un triangle dont l'aire est de 100 cm^2, et dont la longueur est du double de sa hauteur.

   (a) 5 cm (b) 10 cm (c) 20 cm (d) 50 cm (e) 200 cm

2. Déterminer l'aire d'un rectangle si son périmètre est de 28 mètres, et sa longueur diagonale, de 10 mètres.

3. Déterminer la longueur diagonale d'un rectangle dont le périmètre est de 26 mètres, et l'aire, de 30 mètres carrés.

4. Quelle est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'aire est de 30 mètres carrés et le périmètre, de 30 mètres ?

5. Si une chèvre peut manger le gazon d'un terrain en une journée, et qu'un mouton peut manger ce même gazon en deux journées, combien de temps faudrait-il à deux chèvres et un mouton pour manger ce gazon s'ils conjuguaient leurs efforts ?
   (a) 2/5 d'un jour (b) 3/8 d'un jour (c) 1 jour (d) 2 jours (e) 4 jours

6. À ses débuts à la bourse, Joe a doublé sa mise initiale le premier jour, et il a perdu les deux tiers de cette mise initiale le second jour. Quelle a été sa mise initiale s'il lui reste 100 $ après le second jour?
   (a) 50 $ (b) 75 $ (c) 80 $ (d) 125 $ (e) 133,33 $ (f) 150 $

7. Un chiot et un chien pèsent ensemble 12 kilos. Combien pèse le chiot si son poids est le tiers de celui du chien ?

8. Lors d'un trajet de 100 kilomètres, une automobiliste parcourt les premiers 50 kilomètres à une vitesse de 50 km/heure, et les autres 50 kilomètres à 150 km/heure. Combien de temps a-t-elle mis pour effectuer le trajet ?
   (a) 30 minutes (b) 50 minutes (c) 60 minutes (d) 80 minutes (e) 90 minutes

9. Soixante kilomètres séparent les villes d'Ayton et de Beaton. À midi, Alice quitte Ayton en auto vers Beaton à une vitesse de 80 km/heure, tandis que Robert quitte Beaton en tracteur vers Ayton à une vitesse de 40 km/heure. À quelle heure se rencontreront-ils ?

10. Soixante kilomètres séparent les villes d'Ayton et de Beaton. À midi, Alice quitte Ayton en auto vers Beaton à une vitesse de 90 km/heure. Si Robert doit parcourir le même trajet à vélo à une vitesse de 15 km/heure, à quelle heure doit-il partir pour arriver à Beaton en même temps qu'Alice ?

2.15 Des problèmes plus difficiles (section optionnelle)

La matière présentée jusqu'ici dans cette brochure représente un minimum que vous devez savoir avant de commencer un cours de calcul différentiel et intégral de niveau universitaire. Nous espérons toutefois que vous savez aussi d'autres choses! Vous devriez aussi avoir certaines notions d'algèbre linéaire, de géométrie, de statistique et d'autres domaines des mathématiques. Vous devriez dans une certaine mesure savoir appliquer les mathématiques dans d'autres domaines; vous devriez aussi être capable d'expliquer clairement par écrit de ce que vous savez et de résoudre des problèmes nécessitant de faire appel à plusieurs notions. Dans cette section, nous présentons des problèmes représentant un défi additionnel. Des étudiantes et étudiants intéressés pourront aussi trouver d'autres problèmes dans certaines publications, par exemple dans *Crux Mathematicorum*, ou de participer à des concours de mathématiques.

Les réponses des problèmes ci-dessous *ne sont pas* données.

1. Trouver toutes les solutions à l'équation $x^7 + 4x^5 + x^3 - 6x = 0$.
2. Expliquer pourquoi il est impossible (a priori) que l'équation $x^{11} - 7x^7 + x^3 - 4x = 0$ ait un nombre pair de solutions réelles. Enchaîner par l'énoncé d'une loi générale s'appliquant aux polynômes dont celui qui précède.
3. Supposer qu'on veuille savoir si l'équation $ax^8 + bx^6 + cx^4 + dx^2 + e = 0$ possède un nombre pair ou impair de solutions réelles, où a, b, c, d et e sont des nombres réels inconnus (pas tous 0). Pour aider, on peut demander la valeur numérique des lettres en payant 10 $ par lettre. Trouver une stratégie pour déterminer la réponse à un coût minimal.
4. Sans l'aide d'une calculatrice, et sans de longs calculs, expliquer pourquoi le nombre $123abc567$ ne peut pas être un carré parfait (a, b et c étant des chiffres inconnus).
5. Étant donné que $2^{10} = 1024$, donner une estimation du logarithme de 2 en base 10; et trouver le premier chiffre et le nombre de chiffres du nombre 2^{100}.
6. Expliquer pourquoi on ne peut pas définir $0/0$ comme étant égal à 1, tout en respectant les autres règles mathématiques.
7. Déterminer l'aire d'un octogone régulier dont la longueur des côtés est de 1.
8. (a) Quelle est l'aire du plus grand rectangle s'inscrivant dans le plus grand cercle lui-même inscrit dans un carré de rayon 1 ?

   (b) Quelle est l'aire du plus grand cube s'inscrivant dans la plus grande sphère elle-même inscrite dans un cube de rayon 1 ?

9. Lequel des deux nombres 100^{200} ou 200^{100} est le plus grand? Justifiez votre réponse.

10. Pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on définit $n! = n \times (n-1) \times \cdots 3 \times 2 \times 1$. (Cette quantité se dit "n factoriel" et joue un rôle important en mathématiques, notamment en analyse combinatoire et en probabilité.).
(a) Déterminer $n!$ pour $n = 3, 4, \ldots, 8$
(b) Combien de fois le chiffre 0 se répète-t-il à la fin du nombre 100! ?

11. En utilisant des éléments de base en géométrie et le théorème de Pythagore, déterminer $\sin(30°)$, $\sin(45°)$ et $\sin(60°)$.

12. Déterminer $\sin(15°)$ et $\sin(75°)$.

13. À partir des lois du sinus et cosinus pour une somme de deux angles, déduire les lois correspondantes pour la différence entre deux angles, pour le double d'un angle, pour la moitié d'un angle, ainsi que les lois pour évaluer les quantités $\sin(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\cos(b)$.

14. Déterminer l'aire d'un losange en fonction de la longueur de la diagonale principale (ou diagonale la plus longue), si la longueur de la diagonale secondaire est égale à la longueur d'un des côtés.

15. Un cheval et son cavalier se situent à 4 kilomètres au nord d'une rivière qui se dirige toute droite d'est en ouest. Ils peuvent se rendre à leur campement en se dirigeant d'abord vers le sud sur 2 kilomètres, et ensuite vers l'ouest sur 2 autres kilomètres, mais ils veulent se rendre d'abord à la rivière afin que le cheval puisse boire. Déterminer la distance minimale d'un trajet vers le campement passant d'abord par la rivière.

16. La période du développement décimal de $1/3$, soit $0,333\ldots$, est de 1; tandis que celle du développement décimal de $1/7$, soit $0,142857142857\ldots$ est de 6. Trouver des fractions dont les développements décimaux ont des périodes de 2, 3 et 4. Êtes-vous en mesure de trouver, pour ces périodes, des fractions dont le dénominateur est minimal ?

17. Sans l'aide du calcul différentiel et intégral, démontrer que, pour tous les nombres positifs a et b, on a

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ .$$

Réponses aux problèmes

Section 2.1 (1) $\frac{19}{15}$ (2) $\frac{11}{20}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{25}{8}$ (5) $1,48$ (6) $1,7$ (7) $0,001$ (8)$0,123$ (9) $11,0$ (10) 3 (11) 8 (12) $0,0025$

Section 2.2 (1) a^4 (2) $ac(d-e)$ (3) $\frac{y+x^2}{2}$ (4) $a(1+a+a^2)$ (5) $x=0$ (6) 11 (7) 2 (8) 21 (9) $x=-1$ (10) $y=1/3$ (11) a^4/b^4 ou $(a/b)^4$ (12) $x=1$

Section 2.3 (1) a (2) tout x (ou $(-\infty,\infty)$) (3) c (4) $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$ (5) $y\neq 0$ (6) $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2}.\infty)$ (7) $[2,4]$ (8) b (9) d (10) 0 (11) $-x^2$ (12) $x\in(2,6)$ (13) $x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$ (14) $x\in[-1,4]$ (15) $x=-\frac{4}{3},2$

Section 2.4 (1) $x\neq 0$ ou $(\infty,0)\cup(0,\infty)$ (2) $x\neq -1$ ou $(\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ (3) x^2+2x+3 (4) $[0,\infty)$ (5) Domaine : $\neq 0$. Codomaine : $\{-1,1\}$ ou ± 1 (6) (a) $\frac{1}{x^2+1}$ (b) -1 (c) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ (7) a^{-2} (8) $1/4$ (9) $\frac{x+1}{x+2}$ (10) $x^{-1/3}$ (11) e (12) d (13) $\frac{1-x}{2x-1}$

Section 2.5 (1) $x=(5\pm\sqrt{13})/2$ (2) $(2x+1)(x+2)$ (3) $(x+1)^2+1$ (4) $(3+a)x^2+3a$ (5) 1 (6) $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$ (7) $(6x^2+2)/x$ (8) $2x^2+6$ (9) x^4-x^3+x-1 (10) 4 (11) $(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$

Section 2.6 (1) $\frac{-2}{x^2-1}$ (2) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x}$ (3) $\frac{2}{(x+3)(x+2)}$; non. (4) x (5) $\frac{1}{x(x+h)}$ (6) $x=1/2$ (7) $\frac{y+x}{y-x}$ ou $1+\frac{2x}{y-x}$ (8) $\frac{x-1}{x}$ (9) $\frac{-1/5}{x+3}+\frac{1/5}{x-2}$ (10) $x+2-\frac{1/2}{x}+\frac{1/2}{x+2}$ (11) $\frac{1/2}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1/2}{x-1}$

Section 2.7 (1) $\frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x}$ (2) $\frac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b^2}}{b}$ (3)$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ (4)$\frac{ab+(a-b)\sqrt{x}-x}{b^2-x}$ (5)$\frac{x^{1/3}-1}{x-1}$ (6)$\frac{x-y}{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$ (7)$\frac{a^2-x}{ab+(b-a)\sqrt{x}-x}$ (8)$\frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ (9)$\frac{1}{(y+h)^{2/3}+(y+h)^{1/3}h^{1/3}+h^{2/3}}$

Section 2.8 (1) $1/2$ (2) $y=3x$ (3) $y=\frac{3}{2}x-1$ (4) $3\sqrt{2}$ ou $\sqrt{18}$ (5) -1 (6) $(1,4)$ (7) $y=3-x/2$, ou $y=-\frac{1}{2}x+3$ (8) $-1/3$ (9) $y=x-1$ (10) e (11) c (12) b

Section 2.9 (1) d (2) a (3) d (4) e

Section 2.10 (1) $x^{9/2}$ (2) $-1/6$ (3) $x=2$ (4) $x=3$ (5) $1/2$ (6) d (7) c (8) 4 (9) 100 (10) $1/2$

Section 2.11 (1) -3 (2) 8 (3) e (4) b (5) b (6) 3 (7) $1/2$ (8) b (9) c (10) c (11) 17 (12) 9 (13) c

Section 2.12 (1) $90°$ (2) e (3) c (4) d (5) a (6) $-1/\sqrt{2}$ ou $-0,707\ldots$ (7) $45°$ (8) $\sqrt{3}$ (9) $75\pi/180$ ou $5\pi/12$ (10) c (11) c (12) $1/\sqrt{3}$ (13) b (14) d

Section 2.13 (1) e (2) c (3) e (4) e (5) b (6) c (7) b (8) $-7/25$ (9) c (10) a

Section 2.14 (1) c (2) 24 m^2 (3) $\sqrt{109}$ m (4) 13 m (5) a (6) f (7) 3 kg (8) d (9) 12 h 30 (10) 8 h 40

Quelques résultats utiles

Identités algébriques	
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a-b)$	$a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a+b)$
Lois relatives aux exposants et logarithmes	
$a^x b^x = (ab)^x$	$a^x a^y = a^{x+y}$
$(a^b)^c = a^{bc}$	$a^{-b} = 1/a^b = (1/a)^b$
$\sqrt[a]{b^a} = \left(\sqrt[a]{b}\right)^a = b$	$\sqrt[a]{b} = b^{1/a}$
$a^{\log_a(b)} = b$	$\ln(a) = \log_e(a), \quad e = 2,71828\ldots$
$\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(bc)$	$\log_a(b) - \log_a(c) = \log_a(b/c)$
$\log_a(b)\log_b(c) = \log_a(c)$	$\log_a(1/b) = -\log_a(b)$
Éléments de trigonométrie	
Pour un triangle dont les côtés ont longueurs a, b, c et angles opposées A, B, C	
Théorème de Pythagore:	Si C est un angle droit, $a^2 + b^2 = c^2$.
Loi du sinus :	$\sin(A)/a = \sin(B)/b = \sin(C)/c$
Loi du cosinus :	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$
Identités trigonométriques	
$\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$	$\cot(\alpha) = \cos(\alpha)/\sin(\alpha)$
$\cot(\alpha) = 1/\tan(\alpha)$	
$\sec(\alpha) = 1/\cos(\alpha)$	$\csc(\alpha) = 1/\sin(\alpha)$
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$	
$\sec^2(\alpha) - \tan^2(\alpha) = 1$	$\csc^2(\alpha) - \cot^2(\alpha) = 1$
$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$	
$\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$	
$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$	
$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$	
$\tan(A+B) = \frac{\tan(A)+\tan(B)}{1-\tan(A)\tan(B)}$	$\tan(A-B) = \frac{\tan(A)-\tan(B)}{1+\tan(A)\tan(B)}$